第30卷 第4期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.30 No.4
2001年8月 Journal of UEST of China Aug. 2001

B值同分布鞅随机变元序列矩收敛的注记

王定成* 曾 勇

(电子科技大学应用数学系 成都 610054)

【摘要】讨论了一类B值同分布鞅随机变量的矩完全收敛性，在二阶光滑空间中当一定矩存在条件下，利用切尾法、下鞅的极大值不等式、高阶法等分析技巧，给出了此类B值同分布鞅随机变量的矩完全收敛性的充分条件，揭示了B值同分布鞅随机变量的矩完全收敛性与矩存在性之间的关系，得到了满意的结果。

关 键 词 空间; B值鞅; 随机变量和; 矩完全收敛性; 阶光滑空间; 独立随机变量

中图分类号 O152.4

设$\{X_1,\cdots,X_n,\cdots\}$为实值iid随机变量列，并且$S_n=\sum\limits_1^n X_j$。文献[1~3]讨论了实值独立随机变量列部分和的完全收敛性，而对B值独立随机变量列部分和的完全收敛性，文献[4~6]讨论了其相应的结论，文献[7]讨论了实值iid随机变量列的矩完全收敛性，文献[8]讨论了二阶光滑空间中的B值同分布鞅零均值随机变元列$\{X_n\}$的矩完全收敛性，得到了如下结论：设$1\geqslant a>1/2$，$pa=1$，$p\geqslant q\geqslant 1$，$S_n=\sum\limits_{j=1}^n X_j$，$\{X_n\}<V$ 且 $El(V^p)V^p<\infty(p>q)$；$El(V^p)V^p\lg(1+V)<\infty(p=q)$，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-1-qa}\ l(n)\cdot E\{\max\limits_{j\leqslant n}\|S_j\|\,\|S_j\|-en^a\}_+^q<\infty\ \forall e>0$。本文将讨论另一类$B$值同分布鞅随机变量的矩完全收敛性。

1 定 义

设Banach空间是实可分空间，$\{X_n\}$是定义于同一概率空间上的B值随机变元列。称Banach空间是p阶光滑空间($1\leqslant p\leqslant 2$)，若存在常数$C=C_p>0$，使得对每一B值鞅随机变元列$\{X_n\}$，$S_n=\sum\limits_{j=1}^n X_j$，且$E\|X_i\|^p<\infty\ (i\in N)$，则有

$$E\|S_n\|^p\leqslant C\sum_{i=1}^n E\|X_i\|^p\qquad \forall n\geqslant 1$$

记$\{X_n\}<V$，若对某一非负实随机变量，存在常数$C>0$，使得对任意的$t\geqslant 0$，有

$$\sup_n P(\|X_n\|>t)\geqslant CP\qquad V>t$$

2 定理及其证明

定理 1 设$1\geqslant a>1/2$，$\{X_n\}$为B值独立同分布随机变元列，$S_n=\sum\limits_{j=1}^n X_j$，$EX_1=0$，$ap=1$，$p\geqslant q\geqslant 1$，$B$是二阶光滑空间，那么对每一$B$值同分布鞅零均值随机变元列$\{X_n\}$，$S_n=\sum\limits_{j=1}^n X_j$，$EV^p\lg(1+V)<\infty(p>q)$；$EV^p\lg^2(1+V)<\infty(p=q)$，则有

2001年2月20日收稿

* 男 38岁 硕士 讲师

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E\{\sup_{j\geqslant n}\|S_j / j^a\| - e\}_+^q < \infty \tag{1}$$

证明　由引理2

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} E\{\sup_{j\geqslant n}\|S_j / j^a\| - e\}_+^q < \infty \leqslant$$

$$C\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty} P\{\|\sup_{j\geqslant n}\|S_j / j^a\| > e + t^{\frac{1}{q}}\}\mathrm{d}t \leqslant C\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k\geqslant i}\int_0^{\infty} P\{\max_{2^k\leqslant j<2^{k+1}}\|S_j / j^a\| > e + t^{\frac{1}{q}}\}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty} k\int_0^{+\infty} P\{\max_{2^k\leqslant j<2^{k+1}}\|S_j / j^a\| > e + t^{\frac{1}{q}}\}\mathrm{d}t \leqslant C\sum_{k=1}^{\infty} k\int_0^{+\infty} P\{\max_{j\leqslant 2^{k+1}}\|S_j\| > 2^{ka}e + 2^{ka}t^{\frac{1}{q}}\}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-qa}\lg n\int_0^{+\infty} P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\| > \frac{e}{2^a}n^a + y^{\frac{1}{q}}\}\mathrm{d}y\ (y = 2^{kqa}) \leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-qa}\lg n\, E\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\| - \frac{e}{2^a}n^a\}_+^q \tag{2}$$

又

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-qa}\lg n\, E\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\| - e\, n^a)_+^q =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-qa}\lg n\int_0^{+\infty} P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\| > t^{\frac{1}{q}} + e\, n^a\}\mathrm{d}t \leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-qa}\, n^{qa}\lg n\, P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\| > e\, n^a\} +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-qa}\lg n\int_{n^{qa}}^{+\infty} P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\| > t^{\frac{1}{q}}\}\mathrm{d}t = I_1 + I_2 \tag{3}$$

使用 F_j **记** $\{X_1, X_2, \cdots, X_j\}$ **生成的** s **域，且令** $X_j^n = X_j I[\|X_j\| < n^{-a}] - E\{X_j I[\|X_j\| < n^{-a}] / F_{j-1}\}$，$S_i^n = \sum_{j\leqslant i} X_j^n$，**则**

$$P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\| > n^a\} \leqslant P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j - S_j^n\| > n^a\} + P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j^n\| > n^a\} \tag{4}$$

因此，为证 $I_1 < \infty$**，只需证明**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lg n\, P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j^n\| > n^a\} < \infty \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lg n\, P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j - S_j^n\| > n^a\} < \infty \tag{6}$$

因 S_j^n **是鞅，故** $\|S_j^n\|$ **是下鞅，由下鞅的极大值不等式有**

$$P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j^n\| > n^a\} \leqslant Cn^{-2a} E\|S_n^n\|^2$$

由 B **是二阶光滑空间，故**

$$P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j^n\| > n^a\} \leqslant Cn^{1-2a} EV^2 I[V < n^a] \tag{7}$$

所以，当 $1 \geqslant a \geqslant \frac{1}{2}$ **时**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}\lg n\, P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j^n\| > n^a\} \leqslant C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2a}\lg n EV^2 I[V < n^a] \leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2a}\lg n\sum_{k\leqslant n}EV^{2}I[(k-1)^{a}\leqslant V\leqslant k^{a}]\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-2a}\lg kEV^{2}I[(k-1)^{a}\leqslant V\leqslant k^{a}]\leqslant CEV^{p}\lg(1+V)<\infty \tag{8}$$

由于 $P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j-S_j^n\|>n^a\}\leqslant Cn^{1-a}EVI[V>n^a]$，故当 $1\geqslant a\geqslant\frac{1}{2}$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\lg n\;P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j-S_j^n\|>n^a\}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-a}\lg nEVI[V>n^a]\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-a}\lg n\sum_{k\geqslant n}EVI[(k-1)^{a}\leqslant V\leqslant k^{a}]\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-a}\lg kEVI[(k-1)^{a}\leqslant V\leqslant k^{a}]\leqslant CEV^{p}\lg(1+V)<\infty \tag{9}$$

所以

$$I_1=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\lg n\;P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\|e<n^{a}\}<\infty \tag{10}$$

因为 $\forall t>0$，m为正整数，令 $X_j^t=X_jI\left[\|X_j\|<t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right]-EX_jI\left[\|X_j\|<t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right]$，$S_n^t=\sum_{j\leqslant n}X_j^t$，则

$$P\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\|>t^{\frac{1}{q}}\}\sum_{j\leqslant n}P\left\{V\geqslant t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right\}+P\left\{\max_{j\leqslant n}\|S_j^t\|>t^{\frac{1}{q}}\right\} \tag{11}$$

故

$$I_2=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-qa}\lg n\int_{n^{qa}}^{+\infty}P\left\{V\geqslant t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right\}\mathrm{d}t+$$

$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-qa}\lg n\int_{n^{qa}}^{+\infty}P\left\{\max_{j\leqslant n}\|S_j^t\|>t^{\frac{1}{q}}\right\}\mathrm{d}t=I_4+I_5 \tag{12}$$

下面证明 $I_4<\infty$。当 $p>q$ 时 ，注意到 $pa=1$，因此有

$$I_4=C\sum_{k=1}^{\infty}2^{k(1-qa)}k\sum_{j=k}^{\infty}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}}P\left\{V\geqslant t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right\}\mathrm{d}t\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}j\;2^{j(1-qa)}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}}P\left\{V\geqslant t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right\}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}j\;2^{j(1-qa)}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}}P\left\{V\geqslant y\frac{1}{8m}\right\}y^{q-1}\mathrm{d}y\leqslant CEV^{p}\lg(1+V)<\infty \tag{13}$$

当 $p=q$ 时，$qa=1$，则

$$I_4=C\sum_{k=1}^{\infty}k\sum_{j=k}^{\infty}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}}P\left\{V\geqslant t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right\}\mathrm{d}t\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}j^{2}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}}P\left\{V\geqslant t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right\}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}j^{2}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}}P\left\{V\geqslant y\frac{1}{8m}\right\}y^{q-1}\mathrm{d}y\leqslant CEV^{p}\lg(1+V)<\infty \tag{14}$$

故结合式(13)和式(14)得

$$I_4<\infty \tag{15}$$

因为 S_n^t 是鞅，故 $\|S_n^t\|$ 是下鞅，由下鞅的极大值不等式有

$$P\left\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\|>t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{4m}\right\}\leqslant C\frac{1}{t^{\frac{2}{q}}}E\|S_n^t\|^2$$

由二阶光滑空间的定义

$$P\left\{\max_{j\leqslant n}\|S_j\|>t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{4m}\right\}CnEV^2I\left[V<t^{\frac{1}{q}}\frac{1}{8m}\right]$$

当 $p>q$ 时，注意 $pa=1$，$qa<1$, $2a>1$，并取 $m=1$，则有

$$I_5\leqslant \mathrm{C}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-qa}\lg n\int_{n^{qa}}^{\infty}EV^2I\left[V\leqslant\frac{1}{8}t^{\frac{1}{q}}\right]t^{-\frac{2}{q}}\mathrm{d}t=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-qa}\lg n\sum_{j=n}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)^{qa}}E\,V^2I\left[V\leqslant\frac{1}{8}t^{\frac{1}{q}}\right]t^{-\frac{2}{q}}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)^{qa}}EV^2I\left[V\leqslant\frac{1}{8}t^{\frac{1}{q}}\right]t^{-\frac{2}{q}}\mathrm{d}t\,\mathrm{j}\,j^{1-qa}\lg j\leqslant C\sum_{j=1}^{\infty}j^{-2a}\lg j\sum_{k=1}^{j+1}EV^2I\left[\frac{1}{8}(k-1)^a\leqslant V\leqslant\frac{1}{8}k^a\right]\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-2a}\lg k\;EV^2I\left[\frac{1}{8}(k-1)^a\leqslant V\leqslant\frac{1}{8}k^a\right]CEV^p\lg(1+V)<\infty \tag{16}$$

当 $p=q$ 时，$qa=1$，则

$$I_5=C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\lg n\sum_{j=n}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)^{qa}}E\,V^2I\left[V\leqslant\frac{1}{8}t^{\frac{1}{q}}\right]t^{-\frac{2}{q}}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)^{qa}}E\,V^2I\left[V\leqslant\frac{1}{8}t^{\frac{1}{q}}\right]t^{-\frac{2}{q}}\mathrm{d}t\,j\lg^2 j\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-2a}\lg k\;EV^2I\left[\frac{1}{8}(k-1)^a\leqslant V\leqslant\frac{1}{8}k^a\right]CEV^p\lg(1+V)<\infty \tag{17}$$

结合式(16)和式(17)，得 $I_5<\infty$，故定理得证。

参 考 文 献

1 Hsu P L, Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers. Proc Nat Acad Sci, USA, 1947, 33: 25~31

2 Katz M L. The probability in the tail of a distriblation. Ann Math Statist, 1963, 34: 312~318

3 白志东，苏　淳. 关于独立和的完全收敛性. 中国科学，A 缉, 1985, (5): 399~412

4 Wang Dingcheng, Chen Lingjun. The complete convergence of $f-\mathrm{mixing}$ sequence in banach space. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1996, 25(2):216~219[王定成，陈良均. Banach 空间 $f-\mathrm{mixing}$ 序列的完全收敛性. 电子科技大学学报，1996, 25(2): 216~219]

5 吴智全，王向忱. 巴氏空间上的慨率论. 长春: 吉林大学出版社, 1990

6 Chen Liangjun, Wang Dingcheng. Law of mixed sequence in Banach space. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1997, 26(2):204~207[陈良均，王定成. Banach 空间混合列强大数定律的收敛速度. 电子科技大学学报，1997, 26: 204~207]

7 Chow Y S, On the rate of moment convergence of sample sums and extrems. Bull Inst Math Academia Sinica 16:177~201

8 Wang Dingcheng. Moment complete convergence for B valued martingale random variables. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000, 29(6): 658~661[王定成. B 值同分布鞅随机变元序列矩完全收敛性. 电子科技大学学报, 2000, 29(6): 658~661]

A Note on Moment Convergences for *B*-valued Martingale Random Variables

Wang Dingcheng Zeng Yong

(Dept. of Applied Math., UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, a kind of the problems with respect to the moment complete convergence of martingale random variables is discussed. Under certain moment condition, based on high order moment and inequality of supmartingale and other relevant analytical methods, the sufficient condition of the moment complete convergence for martingale random variables is obtained. Therefor, the relation between moment and complete convergence for martingale random variables is revealed with a satisfying result.

Key words martingale in Banch; sums of random variables; moment complete convergence; iid random variables; inequality for moment

---

·科研成果介绍·

战术网仿真技术

主研人员：郭 伟 苏 俭 郑相全 陈 娜 余敬东 柴 蓉 尹道素 谭雪松 许 辉 付 斌

战术网仿真技术实现了战术通信网仿真基础平台，能对战术通信网中的无线ATM网、高速成分组无线网、多功能无线电台网以及三网互连组成的网络进行仿真，给出了多种条件下的网络性能统计特性。仿真软件系统能对大型通信网的性能设计和分析提供有力的技术支持，可完成大通信网网络性能的定量评估。同时该项技术可用于民用通信网的网络性能评估和设计的辅助工具。

·项 曦·

·简 讯·

本刊再次荣获信息产业部“精品期刊”称号

在我校划归教育部主管后，《电子科技大学学报》最后一次参加的信息产业部1999~2000年年度科技期刊评比中，再次荣获“精品期刊”称号。这是继1990年我校参加原电子工业部科技期刊评比以来的第6次获奖(其中第1~4次评比获“一等奖”称号，第5、6次评比获“精品期刊”称号)。

·卞 宣·