

结合频域有限差分法分析二维柱体电磁散射

朱汉清 吴正德 K. M. Luk

(电子科技大学应用物理所 成都 610054) (香港城市大学电子工程系)

【摘要】引入多波前算法，提出了结合频域有限差分法分析二维柱体的电磁散射问题。数值计算过程中利用Mur's二阶吸收边界条件和场平均吸收条件截断网格；作为算例，分析了一无限长理想导体柱对平面电磁波的散射，由于使用了多波前算法求解差分矩阵方程，大大地减少了计算时间，数值结果表明了该方法的有效性。

关键词 频域有限差分法；多波前算法；吸收边界条件；电磁散射

中图分类号 TN817；O441

有限差分法是最早用来进行电磁场数值计算的方法。在频域有限差分法中，无论是差分方程还是边界条件的差分近似都较时域法简单、方便，同时在频域中不必对时间作量化处理，可以减少迭代过程，提高计算精度。利用频域有限差分法分析二维柱体电磁散射，对不规则、非均匀的散射问题有着广泛的适用性，而且形成的矩阵为稀疏阵可利用一些特点来求解方程^[1,2]。但是，随着离散结点个数的增加，差分矩阵方程阶数的提高，频域有限差分法的计算时间会变得相当长，从而极大地限制了该方法在分析许多实际问题中的应用。针对这一困难，本文有效地引入多波前算法，首次提出了结合频域有限差分法分析二维柱体的电磁散射问题。在数值计算过程中利用Mur's二阶吸收边界条件和场平均吸收条件截断网格。由于使用了多波前算法求解稀疏矩阵方程，从而极大地减少了计算时间。为了说明方法的有效性，文中分析了理想导体方柱对平面电磁波的散射，并与矩量法结果进行了比较，作为方法精确性的检验，还对多波前算法与传统的直接法和共轭梯度法(CG)解方程的计算时间也作了比较。

1 理论分析

考虑图1所示的二维导体柱对平面电磁波的散射问题。显然纵向场分量可以独立存在，因此可以分解为 TM_z 和 TE_z 波分别求解。下面先简要说明有限差分方程的建立和频域Mur's二阶吸收边界条件的差分近似构造，并引入多波前算法。

1.1 内结点的频域有限差分方程

由导体柱表面向外作法向射线并建立多层共形网格离散求解区域。用 $u(x,y)$ 表示纵向场分量，显然每个结点上的总场 u 可分解为入射场 u^i 与散射场 u^s 的和，即

$$u = u^i + u^s \quad (1)$$

且 u^s 满足Helmholtz方程，设时间因子为 $e^{j\omega t}$ ，则有

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^s}{\partial y^2} + k_0^2 u^s = 0 \quad (2)$$

式中 $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ 。在内结点上由环路积分方法可得到关于散射场的有限差分方程

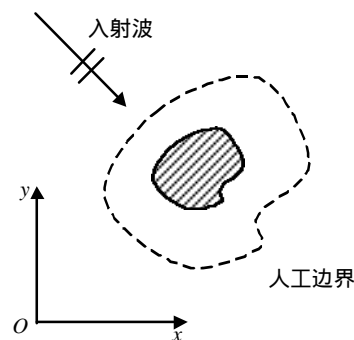


图1 二维柱体散射问题示意图

2001年5月23日收稿

* 男 38岁 博士生 副教授

$$\sum_{i=1}^5 b_i u_i^s = 0 \quad (3)$$

式中 系数 b_i 可利用文献[3]的方法求取。

1.2 频域Mur's二阶吸收边界条件的差分近似

用有限差分法分析无界域问题时,必须选择一种合适的边界条件来截断离散网格。G. Mur通过对波动方程的分解,模拟外向波的传播过程,并利用有限差分近似,提出的Mur's吸收边界条件在

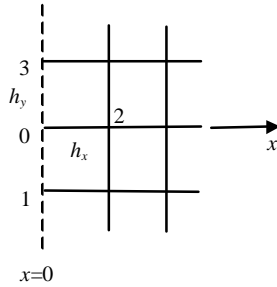


图2 二阶 Mur 条件差分格式

时域分析中得到了广泛的应用^[4]。文献[5]根据相似的处理方法,构造了频域Mur's边界条件的差分近似,有效地将其引入频域,形式简单、精确度高,可以快速形成有限差分方程。

图2为频域二阶Mur's条件的差分离散网格, h_x 、 h_y 分别为 x 、 y 方向的离散步长。考虑 $-x$ 方向的散射波,分解Helmholtz方程,并利用Taylor级数展开,在 $x=0$ 处可得到二阶吸收边界条件的近似方程为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - j \left(k_0^2 + \frac{1}{2k_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] u(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (4)$$

用差商代替式(4)中的微商,便可得到频域Mur's二阶吸收边界条件的差分近似形式为

$$\sum_{i=0}^3 c_i u_i^s = 0 \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} c_0 &= 2e^{jk_0 h_x} - 2k_0^2 h_y^2 e^{jk_0 h_x} - 2 \\ c_1 &= c_3 = 1 - e^{jk_0 h_x} \\ c_2 &= 2k_0^2 h_y^2 \end{aligned}$$

对于角点的处理,可采用频域的场平均吸收条件加以吸收。

1.3 多波前算法

由差分方程(3)、(5)可以建立求解区域内所有结点的线性方程组,其形式为

$$[K]U = F \quad (6)$$

式中 矩阵 $[K]$ 为稀疏阵,每行非零元素不超过5个; U 为待求列矢量; F 为已知列矩阵,其非零元素反映入射波的激励情况。显然,求解式(6)便可得到区域内所有结点的场值,需要注意的是在分析关于 E_z 极化问题时,可以利用理想导体性质减缩相应结点,对方程进行降阶求解。由于差分方程系数矩阵非正定,经典的迭代方法不能保证解方程过程中的收敛性,为此可采用直接法和CG方法求解差分方程。但随着离散网格数的增加,方程的求解时间将会显著加大,极大地限制了有限差分法的应用。为了减少求解时间,提高计算效率,本文引入多波前算法求解稀疏矩阵式(6)。

多波前算法是近年来在波前法基础上发展起来的,用于求解大型稀疏矩阵方程的又一种新的数值方法^[6, 7]。早在1970年, Irons首先提出波前算法用于求解大型稀疏矩阵方程,后来被许多学者引入计算电磁学领域,并获得成功应用^[9-11]。由于它解方程的步骤是对求解区域的未知量从一特定位置逐步向前推进消元,从而最终达到求解的目的,很象物理学上的波从某处向前传播的过程,所以把这种算法形象地称之为“波前法”“波阵法”,其解方程的过程可从文献[9]中得知。多波前算法与波前法的本质区别在于:多波前算法是从多个不同的位置同时向前推进消元的^[7]。波前法在对未知量的消元过程中会形成一个“波前矩阵”,其主对角的非零元素宽度称为“波前带宽”,该算法对求解具有较小波前带宽的稀疏矩阵非常有效。然而,在利用波前法计算大型稀疏矩阵系统的过程中,尽管利用降阶算法可以减小波前带宽^[12],但是对于大型稀疏矩阵,减缩后的波前带宽仍然很大,严

重影响矩阵分解效率，而且花费内存多。针对这一问题，多波前算法根据最低阶算法^[7]，将稀疏矩阵域分解为许多较小的子域，在每个子域内做矩阵分解，消去内部未知量，形成仅与子域边界未知量相关的波前矩阵，再利用降阶算法消去所有相邻子域间的公共未知量。这样，多波前算法在提高矩阵分解效率、节约内存花费上都比波前法更为有效。

2 数值结果

为了验证方法的有效性，本文分析了一理想导体方柱(3I×3I)对E_z极化情形下平面电磁波的散射问题。作为对方法精确性检验，在图3中将距离导体柱表面0.1I处的电场计算值与矩量法所得结果进行了比较^[13]，从图中可以看出两者吻合得很好。表1给出了多波前算法与直接法和CG方法(相对误差取10⁻³)求解差分方程的计算时间比较(运行环境为P 700)，从表1中可以看出本文引入的多波前算法使解方程的计算效率有了大幅度提高。

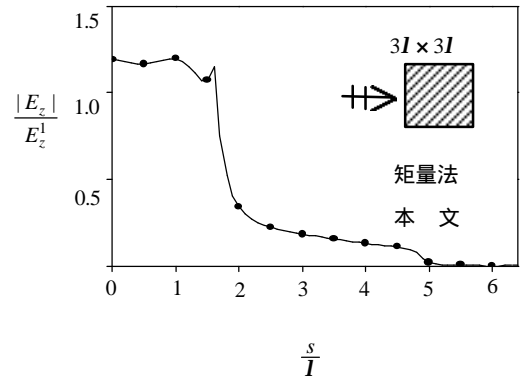


图3 E_z极化下距离柱0.1I处的电场
(s 从入射边中心量起)

表1 计算时间比较

(单位: s)

未知量个数	生成系数矩阵	求解差分矩阵方程		
		直接法	共轭梯度法	多波前算法
1 681	0.44	200.53	94.52	0.27
2 025	0.93	360.97	223.17	0.49
2 401	1.37	636.20	436.06	0.61
2 809	1.98	1 046.55	810.87	1.04
3 249	2.86	—	—	1.65
3 721	4.12	—	—	2.75

3 结 论

根据上述理论分析和数值结果可以得出结论：频域有限差分法结合多波前算法能够用于分析二维柱体的电磁散射问题，由于有效地使用了多波前算法求解差分方程，因极大地减少了计算时间，提高了计算效率。它同样可以用于求解其他数值方法所形成的大型稀疏矩阵方程，在实际问题的分析及优化模拟中有着重要意义。

参 考 文 献

- 1 Long Yi, Xu Jun, Zhun Hanqin. A fast algorithm for solving helmholtz equation on regular domain. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1999, 28(4):383~387[龙 毅, 徐 军, 朱汉清. 一种求解规则区域Helmholtz方程的快速算法. 电子科技大学学报, 1999, 28(4): 383~387]
- 2 Long Yi, Xu Jun, Xue Liangjin. Domain decomposition method combining with FFT for analysis of TEM transmission line. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 2000, 29(5):504~507[龙 毅, 徐 军, 薛良金. 区域分解法结合FFT分析TEM传输线. 电子科技大学学报, 2000, 29(5): 504~507]

- 3 Wen Hong, Liu Y W, Mei K K. Application of the measured equation of invariance to solve scattering problems involving penetrable medium. *Radio Science*, 1994, 29: 897~906
- 4 Mur G. Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electro-magnetic field equations. *IEEE Trans on EMC*, 1981, 23: 377~382
- 5 陈军, 洪伟, 陈忆元. 频域Mur条件差分近似的构造和应用. *电子科学学刊*, 1996, 18(3):283~291
- 6 Davis T A, Duff I S. An unsymmetric-pattern multifrontal methods for parallel sparse LU factorization. *SIAM J Matrix Anal Appl*, 1997, 18:140~158
- 7 Liu J W H. The multifrontal method for sparse matrix solution: theory and practice. *SIAM Rev*, 1992, 34: 82~109
- 8 Irons B M. A frontal solution program for finite element analysis. *Int J Numer Methods Eng*, 1970, 2: 5~32
- 9 Jeng S K. Scattering from a cavity-backed slit in a ground plane—TE case. *IEEE Trans on AP*, 1990, 38:1 523~1 529
- 10 Chung S J, Chen C H. A partial variational analysis of planar dielectric antennas. *IEEE Trans on AP*, 1991, 39: 713~718
- 11 Wu R B. A wideband waveguide transition design with modified dielectric transformer using edge-based tetrahedral finite-element analysis. *IEEE Trans on MTT*, 1996, 44:1 024~1 031
- 12 Cuthill E, McKee J. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. *Proc 24th Nat Conf Assoc Comput Math*, New Jersey: Brandon Press, 1969
- 13 Jin J M, Liepa V V. Simple moment method program for computing scattering from complex cylindrical obstacles. *IEE Proc H*, 1989, 136: 321~329

Analysis of Two-dimensional Cylinder Scattering Problems with Finite-difference Frequency-domain Method

Zhu Hanqing Wu Zhengde

(Inst. of Applied Physics, UEST of China Chengdu 610054)

K. M. Luk

(Dept. of Electronic Engineering, City University. of Hong Kong)

Abstract The finite-difference frequency-domain method with multifrontal algorithm is presented for two-dimensional cylinder scattering problems. The Mur's absorbing boundary conditions (ABCs) of the second order and the ABCs based on the concept of field average are applied at the terminating boundary mesh nodes. As the verification example, the scattering by an infinite cylinder of the perfect electric conductor is analyzed. CPU time is greatly reduced by using multifrontal method to solve the finite-difference equations. Numerical results demonstrate its accuracy and efficiency.

Key words finite-difference frequency-domain method; multifrontal method; absorbing boundary condition; electromagnetic scattering