第30卷 第5期　　电子科技大学学报　　Vol.30 No.5
2001年10月　　Journal of UEST of China　　Oct. 2001

双线性变换的计算实现

张维玺**
(常州技术师范学院电信系　江苏常州　213001)

【摘要】针对双线性变换在工程设计中存在的困难，通过计算机计算，由已知模拟系统传递函数各质量批示参数自动变换到数字城中，建立了一一对应的矩阵关系。进行矩阵运算后，得到所需的数字系统传递函数，它快速、方便、精度高、便于调整优化，在自动控制和数字信号处理中具有一定的价值。

关　键　词　双线性变换；程序；矩阵；信号处理；数字系统
中图分类号　TN713

在自动控制理论和数字信号处理中，双线性变换使用较多，但在阶数较大的情况下，人工计算的方法显得十分繁琐，有些时候无法实现[1, 2]，本文提出了解决这个问题的原理和方法。

1　原　理

一般模拟系统的传输函数为

$$H(S)=\frac{C(S)}{D(S)}=\frac{a_m S^m + a_{m-1}S^{m-1}+\cdots+a_0S^0}{b_nS^n+b_{n-1}S^{n-1}+\cdots+b_0S^0} \tag{1}$$

双线性变换为

$$H(S)\Big|_{S=\frac{Z-1}{Z+1}}=H(Z)$$

则

$$H(Z)=\frac{a_m\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^m+a_{m-1}\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^{m-1}+\cdots+a_0\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^0}{b_n\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^n+b_{n-1}\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^{n-1}+\cdots+b_0\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^0} \tag{2}$$

通常情况下，$n \geqslant m$，　将式(2)分母、分子同乘以$(Z+1)^n$得

$$H(Z)=\frac{C(Z)}{D(Z)}=$$

$$\frac{a_m(1-Z^{-1})^m(1+Z^{-1})^{n-m}+a_{m-1}(1-Z^{-1})^{m-1}(1+Z^{-1})^{n-m+1}+\cdots+a_0(1-Z^{-1})^0(1+Z^{-1})^n}{b_n(1-Z^{-1})^n+b_{n-1}(1-Z^{-1})^{n-1}(1+Z^{-1})+b_{n-2}(1-Z^{-1})^{n-2}(1+Z^{-1})^2+\cdots+b_0(1-Z^{-1})^0(1+Z^{-1})^n} \tag{3}$$

因此

$$D(Z)=\underbrace{[b_0b_1b_2\cdots b_{n-1}b_n]}_{\boldsymbol{B}}\begin{bmatrix}(1+z^{-1})^n(1-z^{-1})^0\\(1+z^{-1})^{n-1}(1-z^{-1})^1\\ \vdots \\(1+z^{-1})^0(1-z^{-1})^n\end{bmatrix} \tag{4}$$

而

2001年2月6日收稿
* 男　49岁　大学　教授

$$\begin{bmatrix}(1+Z^{-1})^{n}(1-Z^{-1})^{0}\\(1+Z^{-1})^{n-1}(1-Z^{-1})^{1}\\\vdots\\(1+Z^{-1})^{1}(1-Z^{-1})^{n-1}\\(1+Z^{-1})^{0}(1-Z^{-1})^{n}\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}q_{00}q_{01}\cdots q_{0n}\\q_{10}q_{11}\cdots q_{1n}\\\vdots\\q_{(n-1)0}q_{(n-1)1}\cdots q_{(n-1)n}\\q_{n0}q_{n1}\cdots q_{nn}\end{bmatrix}}_{Q}\underbrace{\begin{bmatrix}(Z^{-1})^{0}\\(Z^{-1})^{1}\\\vdots\\(Z^{-1})^{n-1}\\(Z^{-1})^{n}\end{bmatrix}}_{Z}\tag{5}$$

从式(5)可以看出、$D(Z)$中的各项系数是由b_i与$(1-Z^{-1})^m(1+Z^{-1})^{n-1}$相乘而得，只要$Q$中的各元素由其能求得，则$H(Z)$就可以用矩阵运算的方法而得到。下面考查$(1-Z^{-1})^m$，由

$$(1-Z^{-1})^m=\sum_{i=0}^{m}C_m^i(-1)^iZ^{-i}\tag{6}$$

有

$$\sum_{i=0}^{m}C_m^i(-Z^{-1})^i=C_m^0+C_m^1(-Z^{-1})+C_m^2(-Z^{-1})^2+\cdots+C_m^m(-Z^{-1})^m$$

则

$$(1+Z^{-1})^{n-m}=C_{n-m}^0(Z^{-1})^0+C_{n-m}^1(Z^{-1})^1+\cdots+C_{n-m}^{n-m}(Z^{-1})^{n-m}=\sum_{k=0}^{n-m}C_{n-m}^k(Z^{-1})^k$$

那么$(1-Z^{-1})^m(1+Z^{-1})^{n-m}$的系数由这两多项式相乘而得，取为$q_{ml}$，一般$L\leqslant n$。

1) 当$L<m$，且$L<n-m$时，两个多项式都存在$(Z^{-1})^L$项，所以$q_{mL}=\sum_{j=0}^{L}C_m^j(-1)^jC_{n-m}^{L-j}$；

2) 当$L<m$，且$L>n-m$时，只有$(1-Z^{-1})^m$多项式中都存在$(Z^{-1})^L$项，所以

$$q_{mL}=\sum_{j=0}^{n-m}C_{n-m}^jC_m^{L-j}(-1)^{L-j}$$

3) 当$L>m$，且$L<n-m$时，只有$(1+Z^{-1})^{n-m}$多项式中存在$(Z^{-1})^L$项，所以$q_{mL}=\sum_{j=0}^{m}C_m^j(-1)^jC_{n-m}^{L-j}$；

4) 当$L>m$, 且$L>n-m$时，$(L<n)$两个多项式中都不含$(Z^{-1})^L$项，所以$q_{mL}=\sum_{j=0}^{n-L}C_{n-m}^{L-m+j}C_m^{m-j}(-1)^{m-j}$。

由此可知，矩阵Q中的各元素的值可用上式求得，即

$$q_{mL}=\begin{cases}\sum_{j=0}^{L}C_m^j(-1)^jC_{n-m}^{L-j} & L\leqslant m,\quad L\leqslant n-m\\ \sum_{j=0}^{n-m}C_{n-m}^jC_m^{L-j}(-1)^{L-j} & L\leqslant m,\quad L>n-m\\ \sum_{j=0}^{m}C_m^j(-1)^jC_{n-m}^{L-j} & L>m,\quad L\leqslant n-m\\ \sum_{j=0}^{n-L}C_{n-m}^{L-m+j}C_m^{m-j}(-1)^{m-j} & L>m,\quad L>n-m\end{cases}$$

由分析可知，矩阵Q有以下特点：

1) 第1列元素全为1；

2) 第1行元素为$(a+b)^n$展开式的系数；

3) 最后一列元素为正、负1交替；

4) 其他元素值为$q_{ij}=q_{i,j-1}-q_{i-1,j-1}-q_{i-1,j}$，可从$Q$中已知元素迭代计算出。

具体证明如下:

1) 由式(5)左边可知，第一列元素都是由$(1-Z^{-1})^m$和$(1+Z^{-1})^{n-m}$相乘的第一个值得出，它的值为1，所以特点1)显而易见;

2) 第一行为$(1+Z^{-1})^n(1-Z^{-1})^0=(1+Z^{-1})^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i(Z^{-1})^i$，显然矩阵$\boldsymbol{Q}$的第一行为$n$阶二项展开式的系数;

3) $\boldsymbol{Q}$中任一项是$(1-Z^{-1})^m(1+Z^{-1})^{n-m}$中最高项系数用原来关系式展开得，$C_m^m(-1)^n C_{n-m}^{n-m}=(-1)^m$($m$表示系数在矩阵中的行数)，所以，当$m$奇偶交替变化时，矩阵中$\boldsymbol{Z}^{-1}$的系数为+1和−1的交替出现;

4) 由定义知$C_n^0=1$, 设$C_0^0=1$，当$m>n$或$m<0$时C_n^m不存在，所以约定在这种情况下$C_n^m=0$，则矩阵$\boldsymbol{Q}$可统一化为

$$q_{mL}=\sum_{i=0}^{L}C_m^i C_{n-m}^{L-i}(-1)^i \qquad 0\leqslant m<n, 0\leqslant L\leqslant n$$

由$C_m^L=C_{m-1}^L+C_{m-1}^{L-1}$

$$\begin{aligned}q_{(m-1)L}=&\sum_{i=0}^{L}C_{m-1}^i C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i=\\&\sum_{i=0}^{L}(C_m^i-C_{m-1}^{i-1})C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i=\\&\sum_{i=0}^{L}C_m^i C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i-\sum_{i=0}^{L}C_{m-1}^{i-1}C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i=\\&\sum_{i=0}^{L}C_m^i(C_{n-m}^{L-i}+C_{n-m}^{L-1-i})(-1)^i-\sum_{i=0}^{L}C_{m-1}^{i-1}C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i=\\&\sum_{i=0}^{L}C_m^i C_{n-m}^{L-i}(-1)^i+\sum_{i=0}^{L}C_m^i C_{n-m}^{L-1-i}(-1)^i-\sum_{i=0}^{L}C_{m-1}^{i-1}C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i\end{aligned}$$

而$q_{mL}=\sum_{i=0}^{L}C_m^i C_{n-m}^{L-i}(-1)^i$，在$\sum_{i=0}^{L}C_{n-m+1}^{L-1-i}(-1)^i$中，当$i=L$时$C_{n-m}^{L-1-i}=C_{n-m}^{-1}=0$，于是$\sum_{i=0}^{L}C_m^i C_{n-m}^{L-1-i}(-1)^i=\sum_{i=0}^{L-1}C_m^i C_{n-m}^{L-1-i}(-1)^i=q_{m(L-1)}$。同时，在$\sum_{i=0}^{L}C_{m-1}^{i-1}C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i$中，当$i=0$时$C_{m-1}^{i-1}=C_{m-1}^{-1}=0$，则

$$\sum_{i=1}^{L}C_{m-1}^{i-1}C_{n-m+1}^{L-i}(-1)^i=\sum_{k=0}^{L-1}C_{m-1}^k C_{n-m+1}^{L-1-k}(-1)^{k+1}=-\sum_{k=0}^{L-1}C_{m-1}^k C_{n-m+1}^{L-1-k}(-1)^k=-q_{(m-1)(L-1)}$$

故

$$\begin{cases}q_{(m-1)L}=q_{mL}+q_{m(L-1)}+q_{(m-1)(L-1)}\\q_{mL}=q_{(m-1)L}-q_{m(L-1)}-q_{(m-1)(L-1)}\end{cases} \tag{7}$$

由此，$\boldsymbol{Q}$的各元素都可以计算出来。只要$H(S)$中n一确定，$H(Z)$中分母多项式$D(Z)$中的矩阵$\boldsymbol{Q}$和$\boldsymbol{Z}$中各元素自然形成，用同样的思路和方法可求出$H(Z)$的分子多项式$C(Z)$。

2 用 法

将以上的方法用计算机程序编写，只要模拟系统函数$H(S)$中的分子，分母多项式的阶数n、m和系数$\{a_i\},\{b_i\}$确定后，直接双线性变换得到$H(Z)$的过程可一次由计算机来实现完成，其步骤是:

1) 输入$H(S)$分子、分母多项式的系数和它的最高阶数n,m;

2) 确定出$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{Z}$的大小;

3) 确定出$\boldsymbol{Q}$中第一项的元素，并给出第一列的元素1;

4) 用式(7)计算出矩阵Q中的其他元素。

3 结 束 语

由前面分析可知，矩阵Q计算是双线性变换的关键，其工作量为

$$q_N=\sum_{i=1}^{N-1}2(2i-1)+2N(N-1)=(4N-2)(N-1)$$

式中　N为阶数。而常用的一般算法的工作量为

$$g_N=\frac{2}{3}n^3+n^3+\frac{1}{2}n^3=2\frac{1}{6}n^3$$

因此，当n较大时前一种矩阵迭代法比后一种常规计算法速度快得多。显然，非常便于计算机程序实现，因为全部过程用的是矩阵和迭代算法，这种算法很容易用计算机运算。此方法还可以用于数字滤波器的设计，只要设计出理想的模拟低通、高通、带通、带阻滤波器后，用本文介绍的矩阵迭代算法可直接双线性变换得到数字的低通、高通、带通、带阻滤波器。如果稍加修改可输出图形或者数据，整个过程由计算机一次完成。

参 考 文 献

1　Constantinides AG. Spectral transformation for digital filters proc of IEE,1970,117(8):1585~1590

2　Swamy M N S, Thyagarajar K S. Frequency transformation of digital filters.proc IEE, 1977, 65:165

The Computerisation of Bilinear Transformation

Zhang　Weixi

(Dept.of E.I.E.Changzhou Teachers Colleg of Technology Jiangsu Changzhou 213001)

Abstract　Considering the difficulties of bilinear transformation in the engineering design, the author of the paper makes it possible for the various quality index parameters of the transfer functions to automatically transform into the digital field through the known analog system, In addition, the author also establishes a one-to-one corresponding matrix relationship. It is fast, convenient, and precise. Moreover, it is easy of regulation and optimism, thus possessing a vertain value in automatic control and the processing of digital signals.

Key words　bilinear transformation; program; matrix;　signal processing; digital system.