第30卷 第5期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.30 No.5
2001年10月　　Journal of UEST of China　　Oct. 2001

一类集值拟变分包含解的存在性定理*

尚明生**　　**孙世新**　　**王庆先**

(电子科技大学计算机学院　成都　610054)

【摘要】研究一类新的集值拟变分包含，在实Hilbert空间中，利用预解算子技术，建立了集值拟变分包含、预解方程和不动点问题间的等价性。利用该等价性，建立了新的迭代算法，得到了这种变分包含解的存在性定理。该文提出的算法和结果推广和改进了近年来许多作者所作的算法和结果。

关　键　词　拟变分包含；集值算子；迭代算法；预解方程；收敛性

中图分类号　O177.91；O176

本文研究的一类新的集值拟变分包含：$0\in N(w,y)+A(g(u),u)$，它包含了以下的变分包含作为其特殊情形：Noor中的变分包含[1]：$<Tu,v-u>+j(v,u)-j(u,u)\geq 0$；Noor中的变分包含[2]：$0\in N(w,y)+A(g(u))$；Ding中的变分不等式[3, 4]：$<w-y,v-g(u)>\geq j(g(u),u)-j(v,u)$；Noor等的变分不等式[5]：$<N(w,y),v-g(u)>\geq f(g(u))-f(v)$；Huang中的变分包含[6]：$0\in f(u)-p(u)+A(k(u),u)$以及Huang中的变分包含[7]：$0\in f(w)-p(y)+A(z)$。

本文对研究的变分包含建立了一些新的算法，其算法和结果推广和改进了Noor中的算法和结果，并将其作为特殊的情形。

1　问题与引理

令H是实的Hilbert空间，$<\cdot,\cdot>$和$\|\cdot\|$分别表示内积和范数，$C(H)$表示H的所有非空紧子集的族，$T,V:H\to C(H)$是集值算子。假设$A:H\times H\to 2^H$使得对任意固定的$x\in H$, $A(\cdot,x):H\to 2^H$是极大单调算子且$R(g)\cap A(\cdot,x)\neq f$。

对给定的非线性算子$N(\cdot,\cdot):H\times H\to H$，寻找$u\in H, w\in T(u), y\in V(u)$使得

$$0\in N(w,y)+A(g(u),u) \tag{1}$$

称式(1)为集值拟变分包含问题。

此外，考虑寻找$x,u\in H, w\in T(u), y\in V(u)$使得

$$N(w,y)+r^{-1}F_A x=0 \tag{2}$$

式中　$r>0$是常数；$F_A=I-R_A$，I是恒等算子，$R_A=J_r^{A(\cdot,u)}$　是预解算子。 称方程(2)是式(1)的预解方程。

引理 1[8]　下面的结论等价：

1)　(u,w,y)，其中$u\in H, w\in T(u), y\in V(u)$是问题(1)的解；

2)　(u,w,y)是下面的方程的解

$$g(u)=J_r^{A(\cdot,u)}(g(u)-rN(w,y)) \tag{3}$$

3)　(x,u,w,y)是预解方程(2)的解,其中

$$x=g(u)-rN(w,y)\qquad g(u)=J_r^{A(\cdot,u)}(x) \tag{4}$$

2001年6月11日收稿
* 国防预研项目；国家自然科学基金资助项目，基金号: 19971058
** 男　28岁　硕士　讲师

2 主要结果

由引理1，可以建立下面的算法。

算法1 令T, V:$H\to C(H)$, $A:H\times H\to 2^H$是集值算子，$N(\cdot,\cdot):H\times H\to H$，$g:H\to H$是单值算子且为满射。对任意给定的$x_0,u_0\in H$，选择$w_0\in T(u_0), y_0\in V(u_0)$，令

$$x_1=g(u_0)-rN(w_0,y_0)$$

由g的满射性知，可以选择u_1使得

$$g(u_1)=J_r^{A(\cdot,u_0)}(x_1)$$

因为$w_0\in T(u_0)$，$y_0\in V(u_0)$，由Nadler's定理知[9]，存在$w_1\in T(u_1), y_1\in V(u_1)$使得

$$| w_0-w_1 ||\le D(T(u_0),T(u_1))$$

$$|| y_0-y_1 ||\le D(V(u_0),V(u_1))$$

令$x_2=g(u_1)-rN(w_1,y_1)$，由g的满射性知，可以选择u_2使得

$$g(u_2)=J_r^{A(\cdot,u_1)}(x_2)$$

继续此方法，可以得到序列$\{x_n\},\{u_n\},\{w_n\},\{y_n\}$使得

$$x_{n+1}=g(u_n)-rN(w_n,y_n)$$

$$w_n\in T(u_n)：|| w_n-w_{n+1} ||\le D(T(u_n),T(u_{n+1}))$$

$$y_n\in V(u_n)：|| y_n-y_{n+1} ||\le D(V(u_n),V(u_{n+1}))$$

$$g(u_{n+1})=J_r^{A(\bullet,u_n)}(x_{n+1}) \qquad n=0,1,\cdots$$

定理1 令算子$x\to N(x,y)$是a-强单调和b-Lipschitz连续的，算子$y\to N(x,y)$是e-Lipschitz连续$g:H\to H$是s-强单调和d-Lipschitz连续2。假设$T,V:H\to C(H)$分别是m，V-D-Lipschitz连续，其中a,b,s,d,e,m,V均未大于零的常数。如果

$$\left| r-\frac{a-(1-k)eV}{b^2m^2-e^2V^2}\right| < \frac{\sqrt{[a-(1-k)eV]^2-k(b^2m^2-e^2V^2)(2-k)}}{b^2m^2-e^2V^2} \tag{5}$$

$$a>(1-k)eV+\sqrt{k(b^2m^2-e^2V^2)(2-k)} \tag{6}$$

$$reV<1-k \tag{7}$$

$$k=2\sqrt{1-2s+d^2}+t \tag{8}$$

$$|| J_r^{A(\cdot,x)}(z)-J_r^{A(\cdot,y)}(z) ||\le t|| x-y || \qquad \forall x,y,z\in H,t>0 \tag{9}$$

则存在$x,u\in H,w\in T(u),y\in V(u)$是预解方程(2)的解，并且由算法1产生的序列$\{x_n\},\{u_n\},\{w_n\},\{y_n\}$分别强收敛于$x,u,w,y$。

证明 由算法1[10, 11]，有

$$\begin{aligned}|| x_{n+1}-x_n ||=&|| g(u_n)-g(u_{n-1})-r\{N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_{n-1})\} ||\le\\ &|| u_n-u_{n-1}-(g(u_n)-g(u_{n-1})) ||+\\ &|| u_n-u_{n-1}-r\{N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_n)\} ||+\\ &r|| N(w_{n-1},y_n)-N(w_{n-1},y_{n-1}) ||.\end{aligned} \tag{10}$$

因为$g:H\to H$是s-强单调和d-Lipschitz 连续的，所以

$$\begin{aligned}&|| u_n-u_{n-1}-(g(u_n)-g(u_{n-1})) ||^2\le\\ &|| u_n-u_{n-1} ||^2-2<u_n-u_{n-1},g(u_n)-g(u_{n-1})>+|| g(u_n)-g(u_{n-1}) ||^2\le\\ &|| u_n-u_{n-1} ||^2-2s|| u_n-u_{n-1} ||^2+d^2|| u_n-u_{n-1} ||^2=(1-2s+d^2)|| u_n-u_{n-1} ||^2\end{aligned}$$

即

$$|| u_n-u_{n-1}-(g(u_n)-g(u_{n-1})) ||\le\sqrt{1-2s+d^2}|| u_n-u_{n-1} || \tag{11}$$

因为算子$x\to N(x,y)$是a-强单调和b- Lipschitz连续

$$\|u_n-u_{n-1}-r(N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_n))\|^2\le\|u_n-u_{n-1}\|^2-2r<u_n-u_{n-1}$$
$$N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_n)>+r^2\|N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_n)\|^2\le$$
$$(1-2ra+r^2b^2m^2)\|u_n-u_{n-1}\|^2$$

即

$$\|u_n-u_{n-1}-r\{N(w_n,y_n)-N(w_{n-1},y_n)\}\|\le\sqrt{1-2ra+r^2b^2m^2}\,\|u_n-u_{n-1}\| \tag{12}$$

由算子 $y\to N(x,y)$ **是** e -Lipschitz**连续性和** V **的** V -D-Lipschitz**连续性，有**

$$\|N(w_{n-1},y_n)-N(w_{n-1},y_{n-1})\|\le e\|y_n-y_{n-1}\|\le eV\|u_n-u_{n-1}\| \tag{13}$$

于是由式(10)~(13)**，有**

$$\|x_{n+1}-x_n\|\le(\sqrt{1-2s+d^2}+\sqrt{1-2ra+r^2b^2m^2}+reV)\|u_{n+1}-u_n\| \tag{14}$$

另外，由算法1**有**

$$\|u_{n+1}-u_n\|=\|u_{n+1}-u_n-(g(u_{n+1})-g(u_n))+J_r^{A(\cdot,u_n)}(x_{n+1})-J_r^{A(\cdot,u_{n-1})}(x_n)\|\le$$
$$\|u_{n+1}-u_n-(g(u_{n+1})-g(u_n))\|+\|J_r^{A(\cdot,u_n)}(x_{n+1})-J_r^{A(\cdot,u_{n-1})}(x_{n+1})\|+$$
$$\|J_r^{A(\cdot,u_{n-1})}(x_{n+1})-J_r^{A(\cdot,u_{n-1})}(x_n)\|\le\sqrt{1-2s+d^2}\,\|u_{n+1}-u_n\|+t\|u_n-u_{n-1}\|+\|x_{n+1}-x_n\|$$

即

$$\|u_{n+1}-u_n\|\le\frac{t\|u_n-u_{n-1}\|+\|x_{n+1}-x_n\|}{1-\sqrt{1-2s+d^2}} \tag{15}$$

把式(14)**代入式**(15)**得**

$$\|u_{n+1}-u_n\|\le h\|u_n-u_{n-1}\|$$

其中

$$h=\frac{t+\sqrt{1-2s+d^2}+\sqrt{1-2ra+r^2b^2m^2}+reV}{1-\sqrt{1-2s+d^2}}$$

由式(5)~(8)**知，** $0<h<1$**，所以，** $\{u_n\}$ **是** H **中的**Cauchy**序列，即存在** $u\in H$ **使得当** $n\to\infty$**，** $u_{n+1}\to u$。**又由式**(14),**序列** $\{x_n\}$ **也是** H **中的**Cauchy**序列，即存在** $x\in H$ **使得当** $n\to\infty$**，** $x_{n+1}\to x$。**又因为**

$$\|w_n-w_{n+1}\|\le D(T(u_n),T(u_{n+1}))\le m\|u_n-u_{n+1}\|$$
$$\|y_n-y_{n+1}\|\le D(V(u_n),V(u_{n+1}))\le V\|u_n-u_{n+1}\|$$

这表明 $\{w_n\},\{y_n\}$ **也是** H **中的** Cauchy **序列，所以分别存在** $w,y\in H$ **使得当** $n\to\infty$**，** $w_n\to w, y_n\to y$。**下面证明** $w\in T(u)$。**事实上，**

$$d(w,T(u))\le\|w-w_n\|+d(w_n,T(u))\le\|w-w_n\|+m\|u_n-u\|\quad\to0\,(n\to\infty) \tag{16}$$

其中 $d(w,T(u))=\inf\{\|w-a\|:a\in T(u)\}$**，这表明** $d(w,T(u))=0$**，从而** $w\in T(u)$。**同理可证** $y\in V(u)$。**因此，** (x,u,w,y) **是方程**(2)**的解。**

由引理1**知，** (u,w,y) **也是集值拟变分包含式**(1)**的解。**

注：1) **如果** $N(w,y)=Tu, T:H\to H$ **是单值算子，** $A=\partial f, f:H\times H\to R\cup\{+\infty\}$ **是真，凸，下半连续泛函，** $g=I$**，则定理**1**退化为文献**[1]**中的定理**3.1**；**

2) **如果** $A(x,y)=A(x),\forall x,y\in H$**，则定理**1**退化为文献**[2]**中的定理**3.2。

参 考 文 献

1 Noor M A. Equivalence of variational inclusions with resolvent equations. Nonlinear Analysis, 2000,41: 963~970

2 Noor M.A., Generalized set-valued variational inclusions andresolvent equations. J Math Anal Appl, 1998, 228: 206~220

3 Ding X P. Perturbed proximal point algorithm for generalized quasivariational inclusions. J Math Anal Appl, 1997, 210: 88~101

4 Ding X P. Proximal point algorithm with errors for generalized strongly nonlinear quasi-variational Inclusions. Appl Math Mech, 1998, 19(7): 577-602

5 Noor M A, Noor K I, Rassias T M. Set-valued resolvent equations and mixed variational inequalities. J Math Anal Appl,1998, 220: 741~759

6 Huang N J. A new completely general class of variational inclusions with noncompact valued mappings. Comput. Math Appl 1998, 35: 9~14

7 Noor M A. Set-valued quasi variational inclusions. Korean J Comput Appl. Math, 2000, 7(1):101~113

8 Huang N J, Mann, Ishikawa. Type perturbed iterative algorithms for generalized nonlinear implicit Quasivariational Inclusions. Comput Math Appl, 1998, 35(10): 1~7

9 Nadler S B. Multi-valued contraction mappings. Pacific J Math, 1969, 30: 475~488

10 尚明生, 王庆先, 吴 鲜. 对带误差项的广义集值变分包含的近似点算法. 数学学报, 2001, 44(4): 753~760

11 Wang Jianguo. Generalized quasi-variational inequality in locally convex topological vector spaces. Journal of University of Electronic Science and Technology of China, 1989, 18(2):171~176[王建国. 局部凸拓扑空间上的广义拟变分不等式. 电子科技大学学报, 1989, 18(2): 171~176]

Existence Theory for A Kind of Generalized Nonlinear Set-valued Quasi-Variational Inclusionsand Resolvent Equations in Banach Spaces

Shang Mingsheng Sun Shixin Wang Qingxian

(Dept.of Computer Science, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract This paper studied a new set-valued quasi-variational inclusions. By using the properties of m-accretive, the equivalence between the generalized nonlinear set-valued quasi-variational inclusions, the resolvent equations, and the fixed-point problem in Banach spaces are established. Using the equivalence, some iterative algorithms for a new class of generalized nonlinear set-valued quasi-variational inclusions and related optimization problems is developed. The algorithms and results improve and generalize many known corresponding algorithms and results in resent years.

Key words quasi-variational inclusions； set-valued mappings； iterative algorithms； resolvent quations