

# 广义Haar子波\*

袁晓\*\*<sup>1</sup> 陈向东<sup>2</sup> 李齐良<sup>3</sup> 扬家德<sup>4</sup>

(1. 四川大学电子信息学院 成都 610064; 2. 电子科技大学传感技术工程四川省重点实验室 成都 610054;  
3. 四川大学物理学院 成都 610064; 4. 重庆光电技术研究所 重庆 400060)

【摘要】研究了最简单的规范正交子波——Haar子波的简单广义化问题，首先提出尺度系数函数新概念，并引进时移因子，将Haar子波进行拓展而得到一类新的规范正交子波：广义Haar子波；从理论上论证这种简单广义化方法的合理性与广义Haar子波的一些基本性质；给出了广义子波系在时域和频域的闭式表达。

关键词 尺度系数函数；时移因子；广义Hilbert变换

中图分类号 O177.6; TN911.72

Haar函数系： $f_H(t)$ 和 $y_H(t)$ ，目前被称为Haar子波，是早期人们发现的第一个最简单的规范正交子波原型。由于具有许多特殊性质而使得它在子波理论研究和工程应用中具有重要的地位。

Haar子波在时域和频域均具有简明的闭式表达

$$\begin{cases} f_H(t) = c_{[0,1]}(t) \Leftrightarrow \hat{f}_H(\omega) = \frac{1}{i\omega} (1 - e^{-i\omega}) = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{2}\right) \exp(-i\omega/2) \\ y_H(t) = c_{[0,1/2]}(t) - c_{[1/2,1]}(t) \Leftrightarrow \hat{y}_H(\omega) = \frac{1}{i\omega} [1 - e^{-i\omega/2}]^2 = \text{sinc}\left(\frac{\omega}{4}\right) \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \exp[-i(\delta - \omega)/2] \end{cases} \quad (1)$$

式中  $c$  为特征函数， $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$ ；Haar子波的另一个特点是具有良好的时间局域化特征，存在最简单的双尺度关系  $f_H(t) = f_H(2t) + f_H(2t-1)$ ， $y_H(t) = f_H(2t) - f_H(2t-1)$ 。

本文提出一种简单广义化Haar子波系的方法，从理论上论证了该方法的合理性，给出了广义Haar子波系的闭式表达形式。

## 1 Haar尺度系数函数与Haar子波的简单广义化

Haar尺度函数  $f_H(t)$  完全由Haar滤波函数

$$H_H(\omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-i\omega) = \cos(\omega/2) \exp(-i\omega/2) \quad (2)$$

的系数  $h_H : [h_0, h_1] = [1/2, 1/2]$  所确定。由Haar尺度系数  $h_H$  可以构造出一个光滑函数

$$h_H(t) = \frac{1}{2} \text{sinc}(\delta t) + \frac{1}{2} \text{sinc}[\delta(t-1)] = \frac{1}{2} \frac{\sin[\delta(t-1)]}{\delta t(t-1)} \quad (3)$$

其Fourier变换为

$$\hat{h}_H(\omega) = c_{[-\pi, \pi]}(\omega) H_H(\omega) \quad (4)$$

本文称  $h_H(t)$  为Haar尺度系数函数，其波形如图1所示。分析  $h_H(t)$  可知  $h_H$  正好是  $h_H(t)$  的整数点位的抽样值，即

$$h_H : h_k = h_H(k) = \begin{cases} 1/2 & k = 0, 1 \\ 0 & k \neq 0, 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

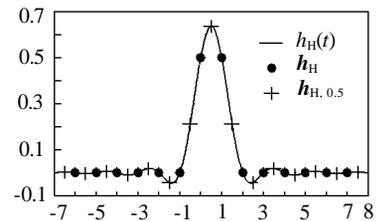


图1 Haar尺度系数函数  $h_H(t)$

2001年7月2日收稿

\* 国防科技重点实验室基金试点项目

\*\* 男 36岁 博士 副教授

由式(4)给出的  $\hat{h}_H(\mathbf{w})$  是紧支的, 支撑区间为  $\text{supp}\{\hat{h}_H(\mathbf{w})\}=[-\pi, \pi]$ , 且有  $\hat{h}_H(\pm\pi)=0$ , 因此根据 Shannon 抽样定理, 以抽样步距  $\Delta=1$  对 Haar 尺度系数函数  $h_H(t)$  的非整数点位抽样得到的新序列

$$\mathbf{h}_{H,t}: h_k = h_H(\Delta(k-t)) = h_H(k-t) \quad t \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z} \quad (6)$$

也能完全重构列  $h_H(t)$ 。

式(6)中的参变量  $t$  本文称为时移因子。显然当  $t=l, l \in \mathbf{Z}$  时, 新序列  $\mathbf{h}_{H,t}$  除有  $l$  位平移外, 与 Haar 尺度系数序列  $\mathbf{h}_H$  是一致的。这些新序列  $\mathbf{h}_{H,t}$  与原序列  $\mathbf{h}_H$  具有相同的幅度谱:  $|H_{H,t}(\mathbf{w})| = |H_H(\mathbf{w})| = |\cos(\mathbf{w}/2)|, t \in \mathbf{R}$ , 从而  $\mathbf{h}_{H,t}$  必定继承  $\mathbf{h}_H$  的许多基本性质, 因此本文称新序列  $\mathbf{h}_{H,t}, t \in \mathbf{R}$  为广义 Haar 尺度系数序列(显然有  $\mathbf{h}_H = \mathbf{h}_{H,0}$ ), 对应的尺度函数  $f_{H,t}(t)$  和子波  $y_{H,t}(t)$  则称为广义 Haar 系。

对于非整数的时移因子  $t (\neq l, l \in \mathbf{Z})$ , 新序列  $\mathbf{h}_{H,t}$  虽然不是紧支的, 但却是速降, 由式(3)知, 式(6)所确定的序列系数  $|h_k| = O(1/(1+k^2))$ , 因此对应的尺度函数  $f_{H,t}(t)$  也是速降的。当  $t=1/16, 1/8, 1/4$  和  $1/2$  时, 相应的广义 Haar 子波系时域波形如图2所示。

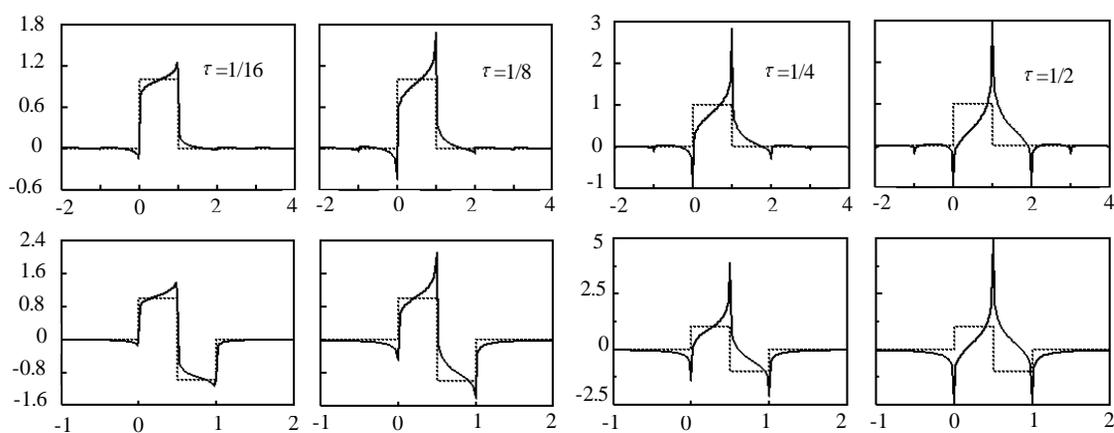


图2 广义 Haar 子波系(图中虚线为 Haar 子波系)

## 2 理论分析

定理 1 广义 Haar 尺度系数序列  $\mathbf{h}_{H,t}$  对应的滤波函数为

$$H_{H,t}(\mathbf{w}) = H_H(\mathbf{w}) \exp \left\{ -i t \mathbf{w} + i 2 \delta t \operatorname{sgn}(\mathbf{w}) \operatorname{int} \left( \frac{|\mathbf{w}| + \delta}{2 \delta} \right) \right\} \quad (7)$$

式中  $\operatorname{sgn}(\cdot)$  为符号函数,  $\operatorname{int}(\cdot)$  为取整函数。

证明 因为  $h_H(t-t) \Leftrightarrow \hat{h}_H(\mathbf{w}) \exp(-i t \mathbf{w}), \hat{h}_H(\mathbf{w}) = c_{[-\pi, \pi]}(\mathbf{w}) H_H(\mathbf{w})$ , 而  $H(\mathbf{w})$  是  $2\pi$ -周期的, 则

$$\begin{aligned} H_{H,t}(\mathbf{w}) &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k \exp(-i k \mathbf{w}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} h_H(k-t) \exp(-i k \mathbf{w}) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \hat{h}_H(\mathbf{w} - 2\pi k) \exp(-i t(\mathbf{w} - 2\pi k)) = \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{(-\delta, \delta)}(\mathbf{w} - 2\delta k) H_H(\mathbf{w} - 2\delta k) \exp(-i t(\mathbf{w} - 2\delta k)) = \\ &= H_H(\mathbf{w}) \exp(-i t \mathbf{w}) \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_{(-\delta, \delta)}(\mathbf{w} - 2\delta k) \exp(i 2 \delta k) = \\ &= H_H(\mathbf{w}) \exp \left\{ -i t \mathbf{w} + i 2 \delta t \operatorname{sgn}(\mathbf{w}) \operatorname{int} \left( \frac{|\mathbf{w}| + \delta}{2 \delta} \right) \right\} \end{aligned}$$

证毕

根据定理1立即可得, 由式(3)、(6)所确定的广义 Haar 尺度系数序列  $\mathbf{h}_{H,t}$  具有如下性质:

性质1 (能量)规范性  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} h_k = H_{H,t}(0) = 1$ ;

性质2 正则性  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = H_t(\pi) = 0$ ;

性质3 正交性  $|H_{H,t}(\mathbf{w})|^2 + |H_{H,t}(\mathbf{w} + \pi)|^2 = |H_H(\mathbf{w})|^2 + |H_H(\mathbf{w} + \pi)|^2 = 1$ 。

这表明新序列  $h_{H,t}$  继承了原序列  $h_H$  的基本特性, 即  $h_{H,t}, t \in \mathbf{R}$  均是规范正交的 and 正则的。

定理 2 广义 Haar 的子波系  $f_{H,t}(t)$  和  $y_{H,t}(t)$  的频谱为

$$\hat{f}_{H,t}(\mathbf{w}) = \hat{f}_H(\mathbf{w}) \exp[iq_t(\mathbf{w})], \quad q_t(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}t + 2\delta t \operatorname{int}\left(\frac{\mathbf{w}}{2\delta}\right) \quad (8a)$$

$$\hat{y}_{H,t}(\mathbf{w}) = \hat{y}_H(\mathbf{w}) \exp[ix_t(\mathbf{w})], \quad x_t(\mathbf{w}) = -\delta t \operatorname{sgn}(\mathbf{w}) \quad (8b)$$

证明 根据多分辨分析理论, 将式(7)代入  $\hat{f}_{H,t}(\mathbf{w}) = \prod_{j=1}^{\infty} H_{H,t}(\mathbf{w}/2^j)$ , 即有  $\hat{f}_{H,t}(\mathbf{w}) = \hat{f}_H(\mathbf{w}) \exp(iq_t(\mathbf{w}))$ , 式中尺度相位函数  $q_t(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}t + 2\delta t \operatorname{sgn}(\mathbf{w}) \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{int}\left[\left(\frac{|\mathbf{w}/2^j| + \delta}{2\delta}\right)\right]$ , 其曲线如图3a所示, 因此  $q_t(\mathbf{w})$  又可等价表示为  $q_t(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}t + 2\delta t \operatorname{int}(\mathbf{w}/2\delta)$ 。证毕

将式(7)和式(8a)代入  $\hat{y}_{H,t}(\mathbf{w}) = -\exp(-i\mathbf{w}/2) H_{H,t}^*[(\mathbf{w}/2) + \delta] \hat{f}_{H,t}(\mathbf{w}/2)$ , 有  $\hat{y}_t(\mathbf{w}) = -\exp(-i\mathbf{w}/2) H_H^*[(\mathbf{w}/2) + \delta] \hat{f}_H(\mathbf{w}/2) \exp(ix_t(\mathbf{w})) = \hat{y}_H(\mathbf{w}) \exp[ix_t(\mathbf{w})]$ , 式中子波相位函数  $x_t(\mathbf{w}) = x_t(\mathbf{w}) = 2\delta t \left[ \frac{1}{2} - \operatorname{sgn}\left(\frac{\mathbf{w}}{2} + \delta\right) \operatorname{int}\left(\frac{|\delta + (\mathbf{w}/2)| + \delta}{2\delta}\right) + \operatorname{int}\left(\frac{\mathbf{w}}{4\delta}\right) \right]$ , 其曲线如图3b所示, 因此  $x_t(\mathbf{w})$  可等价表示为  $x_t(\mathbf{w}) = -\pi t \operatorname{sgn}(\mathbf{w})$ 。证毕

定理2表明, 时移因子  $t$  对原始 Haar 子波基  $f_H(t)$  和  $y_H(t)$  的作用仅仅改变其相位。

对原始的 Haar 子波  $y_H(t)$  来说, 式(8b)在时域的等价形式为

$$\mathbf{y}_{H,t}(t) = X[\mathbf{y}_H(t)] = \mathbf{y}_H(t) * \mathbf{b}_t(t) \quad (9)$$

式中  $X$  为子波相位算子, 表示与函数  $\mathbf{b}_t(t)$  的卷积运算。函数  $\mathbf{b}_t(t)$  的 Fourier 变换为

$$\hat{\mathbf{b}}_t(\mathbf{w}) = \exp(ix_t(\mathbf{w})) = \cos(\delta t) - i \sin(\delta t) \operatorname{sgn}(\mathbf{w}) \quad \mathbf{w} \in \mathbf{R}$$

从而函数  $\mathbf{b}_t$  在时域的表达式为

$$\mathbf{b}_t(t) = \cos(\pi t) \mathbf{d}(t) + [\sin(\pi t)] / (\pi t) \quad (10)$$

将式(10)代入式(9)得

$$\mathbf{y}_{H,t}(t) = \Xi[\mathbf{y}_H(t)] = \cos(\pi t) \mathbf{y}_H(t) + \sin(\pi t) \tilde{\mathbf{y}}_H(t) \quad (11)$$

式中  $\tilde{\mathbf{y}}_H(t)$  表示  $\mathbf{y}_H(t)$  的 Hilbert 变换, 即有

$$\tilde{\mathbf{y}}_H(t) = \mathbf{y}_H(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{y}_H(x)}{\pi(t-x)} dx = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{4t(t-1)}{(2t-1)^2} \right| \quad (12)$$

这正好对应于  $t=0.5$  时的情形, 此时有  $\hat{\mathbf{b}}_{0.5}(\mathbf{w}) = -i \operatorname{sgn}(\mathbf{w}) \Leftrightarrow \mathbf{b}_{0.5}(t) = 1/\delta t$ , 其相位  $\mathbf{x}_{0.5}(\mathbf{w}) = -\delta/2 \operatorname{sgn}(\mathbf{w})$ 。而对于一般的  $t \in \mathbf{R}$ , 函数  $\mathbf{b}_t(t)$  所对应的相位函数为  $\mathbf{x}_t(\mathbf{w}) = -\pi t \operatorname{sgn}(\mathbf{w})$ , 因此式(9)的卷积运算可看成是 Hilbert 变换的推广,  $X$  可称为广义 Hilbert 变换算子。

尺度相位函数  $q_t(\mathbf{w})$  可分解成

$$\begin{cases} q_t(\mathbf{w}) = x_t(\mathbf{w}) + z_t(\mathbf{w}) \\ z_t(\mathbf{w}) = -\mathbf{w}t - \pi t \left[ 2 \operatorname{int}\left(\frac{\mathbf{w}}{2\pi}\right) + \operatorname{sgn}(\mathbf{w}) \right] \end{cases} \quad (13)$$

式中 相位函数  $z_t(\mathbf{w})$  曲线如图3c所示, 它是一个  $2\pi$ -周期的锯齿波, 对应的时域函数为

$$\mathbf{a}_t(t) = \cos\left[\frac{\pi}{2}(t+t)\right] \operatorname{sinc}\left[\frac{\pi}{2}(t-t)\right] \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}(t-k) \quad (14)$$

因而式(8a)在时域的等价形式为

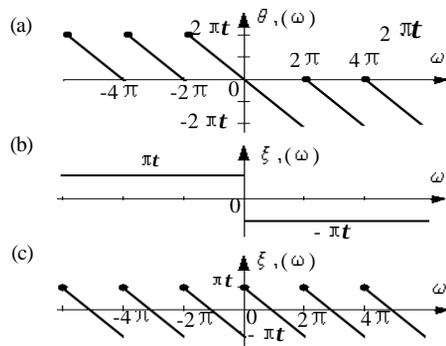


图 3 相位函数曲线图

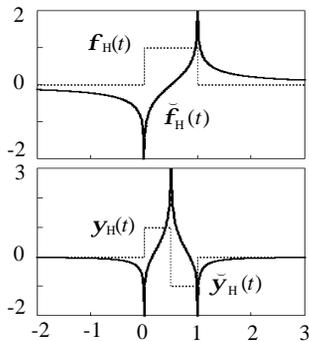


图 4 Haar 子波系及其 Hilbert 变换

$$f_{H,t}(t) = [\cos(\pi t) f_H(t) + \sin(\pi t) \tilde{f}_H(t)] * a_t(t) \quad (15)$$

式中  $\tilde{f}_H(t)$  表示 Haar 尺度函数  $f_H(t)$  的 Hilbert 变换, 即有

$$\tilde{f}_H(t) = f_H(t) * \frac{1}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_H(x)}{\pi(t-x)} dx = \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t}{t-1} \right| \quad (16)$$

由式(1)、(12)和式(16)画出 Haar 子波系  $f_{H,t}(t)$  和  $y_{H,t}(t)$ , Hilbert 变换  $\tilde{f}_H(t)$  和  $\tilde{y}_H(t)$  的时域波形如图 4 所示。

式(14)~(16)表明, 广义 Haar 尺度函数  $f_{H,t}(t)$  是  $f_H(t)$  和  $\tilde{f}_H(t)$  的线性组合, 而式(11)则表明广义 Haar 子波  $y_{H,t}(t)$  是  $y_H(t)$  和  $\tilde{y}_H(t)$  的线性组合, 由此很容易地得出如下定理。

**定理 3** 对所有的时移因子  $t \in \mathbf{R}$ , 广义 Haar 子波系  $f_{H,t}(t)$  和  $y_{H,t}(t)$  均具有相同的时域局域化特征(即时域能量标准方差)。

式(11)、(12)和式(15)、(16)分别给出了  $f_{H,t}(t)$  和  $y_{H,t}(t)$  的时域闭式表达, 由此可知, 对于非整数的  $t \neq l, l \in \mathbf{Z}$ ,  $f_{H,t}(t)$  和  $y_{H,t}(t)$  均是无界的。而从双尺度方程迭代生成  $f_{H,t}(t)$  的角度来看, 应有  $\lim_{t \rightarrow 0} f_{H,t}(t) = f_H(t)$ , 即  $f_{H,t}(t)$  随  $t$  的变化应是渐变的, 当  $t \rightarrow 0$  时,  $f_{H,t}(t)$  是有界的。

### 3 结束语

广义 Haar 子波系是 Haar 子波系的拓展, 它们是通过一个新的参变量——时移因子  $t \in \mathbf{R}$  作用于 Haar 尺度系数函数  $h_H(t)$  后, 再对其整数点位进行抽样得到的序列  $h_{H,t}$  而构造出来的, 即 Haar 子波是  $t$  为整数时的情形, 广义 Haar 子波是  $t$  为实数时的情形。

广义 Haar 子波系是以 Haar 子波系为基础构造出来的, 因此它们继承了(原始) Haar 子波系的许多优点, 比如: 正则阶、标准正交性, 时、频局域化特征等, 同时除对称的 Haar 子波系以外, 当  $t$  为半整数时, 还得到一新的对称基。

### 参 考 文 献

- 1 Daubechies I. Ten lectures on wavelets. Philadelphia, SIAM, 1992
- 2 崔锦泰著. 小波分析导论. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1995
- 3 龙瑞麟著. 高维小波分析. 北京: 世界图书出版公司, 1995.5
- 4 L. 科恩著. 时-频分析: 理论与应用. 白居宪译. 西安: 西安交通大学出版社, 1998
- 5 O. Rioul. Regular wavelets: a discrete-time approach. IEEE Trans. on SP, 1993, 41(12): 3 572-3 579
- 6 潘文杰编著. 傅里叶分析及其应用. 北京大学出版社, 2000
- 7 袁 晓, 虞厥邦. Bubble 小波的正交条件研究. 电子科技大学学报, 1998, 27(1): 25-28
- 8 陶德元, 袁 晓, 何小海. 一类复子波的时-频局域化特征分析. 电子科技大学学报, 2000, 30(1): 21-25

## The Generalized Haar Wavelet

Yuan Xiao<sup>1</sup> Chen Xiangdong<sup>2</sup> Li Qiliang<sup>3</sup> Yang Jiade<sup>4</sup>

(1. College of Electronic Information, Sichuan Univ., Chengdu 610064; 2. Sichuan Province Key Lab for Transducer Thch. & Eng., UESTC, Chengdu 610054; 3. College of Physics, Sichuan Univ., Chengdu 610064; 4. Chongqing Optoelectronic Research Inst.Chongqing 400060)

**Abstract** The simple generalizing topic of the Haar wavelet is investigated in this paper. Firstly, an new concept called as the scaling coefficient function is presented, and then, introducing the time shift factor into the scaling coefficient function, the Haar wavelet is extended to the generalized Haar wavelets which an novel class of orthonormal wavelet. Secondly, the rationality of the simple generalizing method of the orthonormal wavelet, which presented in this paper, is studied theoretically and some properties of the generalized Haar wavelet are discussed. Finally, the closed form expression of the generalized Haar wavelet is given in both the time domain and the frequency domain.

**Key words** scaling coefficient function; time-shift factor; generalized Hilbert transformation

(上接第18页)

## A Design of Hybrid Optical Fiber Amplifier

Xue Fei Qiu Kun Zhang Hongbin

(Institute of Communication and Information Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** The paper studies the characteristics of EDFA and RFA in detail on the base of emulation experiments using PTDS, which is a simulation platform for optical transmission system emulation. A 1dB-gain-flatness-bandwidth reaching 3.75 THz, 3dB-bandwidth reaching 4.25 THz and OSNR at 193.1 THz reaching 38.5 dB hybrid amplifier comprised of a distributed Raman amplifier and an EDFA has been achieved and is applied in a 4-channel DWDM communications system. After 230 km transmission, the output signals are excellent. The output OSNR reaches 33.14 dB, the output power reaches 4  $\mu$ W and the BER reaches  $3.8 \times 10^{-10}$ .

**Key words** wavelength division multiplexing; optical amplifier; EDFA; fiber Raman amplifier; stimulated Raman Scattering; gain spectrum