

# 刚体转动渐进跟踪控制的逆系统方法

高 坚<sup>\*1</sup> 佟明安<sup>1</sup> 贺昌政<sup>2</sup>

(1.西北工业大学电子工程系 西安 710072; 2.四川大学管理科学系 成都 610065)

【摘要】逆系统方法是以非线性控制为目的,以直接分析为途径,以动态系统的逆概念为核心。该文将逆系统方法应用于刚体动力学中,运用非线性控制的逆系统方法设计Euler动力学方程的控制器,通过对一个陀螺的外力矩进行实施控制,使刚体在动坐标系下的角速度稳定跟踪指令,来实现对刚体转动的渐进跟踪控制。

关键词 逆系统方法; 刚体动力学; Euler方程; 渐进跟踪

中图分类号 TP273; TB122

## The Inverse System Method to the Progressive Tracking of the Rigid Body System

Gao Jian<sup>1</sup> Tong Mingan<sup>1</sup> He Changzheng<sup>2</sup>

(1.Northwestern Polytechnic University Xi'an 710072; 2. Department of Management Science, Sichuan University Chengdu 610065)

**Abstract** Nonlinear control is the purpose, direct analysis is the route, and the concept of "inversion" of dynamic system is the kernel of this theory. The author applies the inverse system method to rigid body dynamics system and designs a control of the Euler dynamic equations, so that the angular velocity of a rigid body keeps track of the dictate in the coordinate of motion. The progressive tracking of the motion of a rigid body is realized by controlling outside moment of a rotor.

**Key words** inverse system method; rigid body dynamics; Euler equation; progressive tracking

在刚体动力学中,微分几何法在解决非线性控制问题中得到了很好的应用。把刚体动力学中发展起来的有向流形方法运用于非线性控制系统,在不变引力场刚体运动控制中得到了很好的应用<sup>[1]</sup>。但该方法较抽象,且使用过程中计算繁琐。而逆系统方法作为非线性控制的新理论,以其物理概念清晰、适用面宽、应用简便,故在工程和各学科中得到了有效应用<sup>[2,4]</sup>。

本文将文献[2]的逆系统方法应用于刚体动力学中,运用逆系统方法设计Euler动力学方程的控制器,通过对一个陀螺实施控制,实现对刚体转动的渐进跟踪控制。

### 1 多变量非线性控制的逆系统方法

设系统为

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{X} = F(X, U), & X(t_0) = X_0 \\ Y = H(X, U) \end{cases}$$

式中  $X \in R^n$  为状态向量;  $U \in R^m$  为输出向量;  $Y \in R^r$  为输出向量,且  $r = m$ 。

若能由  $Y = H(X, U)$  解出  $U = H^{-1}(X, Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(k)})$ , 则系统

2000年3月23日收稿

\* 男 36岁 博士生。主要研究方向:非线性系统控制理论及其在航空武器指挥控制系统中的应用,大系统递阶控制等。

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{X} = F[X, H^{-1}(X, Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(k)})] \\ U = H^{-1}(X, Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(k)}) \end{cases}$$

$X(t_0) = X_0$  称为  $\Sigma$  的一个逆系统,  $U = H^{-1}(X, Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(k)})$  由下面方法解出。

令  $H_0 = Y - H(X, U)$ , 设已得到  $H_k$ , 下面求  $H_{k+1}$ 。

记 
$$m_k = \text{rank} \left[ \frac{\partial}{\partial U} H_k \right]$$

1) 若  $m_k < m$ , 则  $H_k$  的  $r$  个分量中有  $m_k$  个以  $U$  为自变量的函数独立, 设前  $m_k$  个函数独立, 记为  $\bar{H}_k$ , 其余  $r - m_k$  个记为  $\hat{H}_k$ , 则可以从  $\bar{H}_k = 0$  中解出  $(U_1, \dots, U_{m_k}) = F_k$ ,  $F_k$  中含  $U_{m_k+1}, \dots, U_m$ 。将  $F_k$  代入  $\hat{H}_k$ , 则有  $\frac{\partial \hat{H}_k}{\partial U} = 0$ , 因此

$$\frac{d}{dt} [\hat{H}_k] = \sum_{i=0}^k \left[ \frac{\partial}{\partial Y^{(i)}} \hat{H}_k \right] Y^{(i+1)} + \left[ \frac{\partial}{\partial X} \hat{H}_k \right] F$$

从而可令

$$H_{k+1} = \begin{bmatrix} \bar{H}_k \\ \frac{d\hat{H}_k}{dt} \end{bmatrix}$$

2) 若  $m_k = m$ , 则令  $k = a$ ,  $a$  为相对阶, 即存在形如  $U = H^{-1}(X, Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(a)})$  的唯一解。

3) 若  $m_k$  始终与  $m$  不等, 则逆系统在这种求逆方法下不存在。

令  $j(t) = Y^{(a)}(t)$  为输入, 又可构成系统  $\Sigma$  的  $a$  阶积分逆系统  $\hat{\Sigma}_a$  (含生成  $Y, \dot{Y}, \dots, Y^{(a-1)}$  的积分器), 从而将  $\hat{\Sigma}_a$  与  $\Sigma$  串联在一起, 构成  $a$  阶伪线性系统。

设一个控制器构成一个控制系统, 使其输入输出动态特性为

$$Y^{(k)}(t) + a_{k-1} Y^{(k-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{Y}(t) + a_0 Y(t) = R(t) \quad k = a$$

式中  $a_i (i = 0, k-1)$  为一组待定实对角  $r \times r$  阶方阵,  $R(t) \in R^r$  是参考输入, 可构成满足要求的控制系统。逆系统控制结构如图1所示, 适当选  $k$ , 则可达到所要求的极点配置及渐进跟踪。

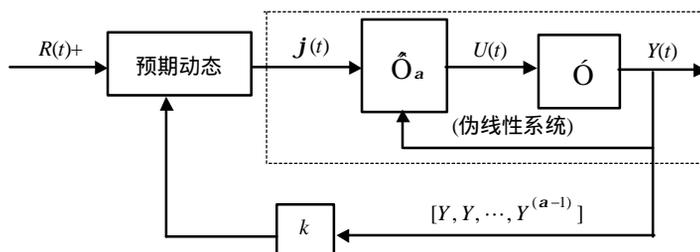


图1 逆系统控制结构

## 2 刚体转动的渐进跟踪设计

### 2.1 Euler动力学方程与陀螺运动的Euler方程

1) Euler动力学方程为<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} I_1 \dot{w}_x - (I_2 - I_3) w_y w_z &= M_x \\ I_2 \dot{w}_y - (I_3 - I_1) w_z w_x &= M_y \\ I_3 \dot{w}_z - (I_1 - I_2) w_x w_y &= M_z \end{aligned} \quad (1)$$

式(1)描述了刚体在动坐标系  $S'$  下绕定点转动时角速度  $w = (w_x, w_y, w_z)^T$  与外力矩  $M = (M_x, M_y, M_z)^T$  之间的关系。其中  $I_1, I_2, I_3$  为刚体对三动坐标  $X, Y, Z$  的转动惯量(为常数)。动坐标轴随刚

体一起转动, 与刚体相对位置保持不变。设定坐标系  $S$  为  $x, h, z$ , 则定、动坐标系的关系可用角度  $q, j, y$  表示为:  $0 < q < \pi, 0 < j < 2\pi, 0 < y < 2\pi$ 。且有 Euler 动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{w}_x = j \sin q \sin y + \dot{q} \cos y \\ \dot{w}_y = j \sin q \cos y - \dot{q} \sin y \\ \dot{w}_z = j \cos q + \dot{j} \end{cases}$$

2) 陀螺运动的 Euler 方程

令动坐标系  $S'$  的  $Z$  轴与陀螺的对称轴重合, 固定点与定坐标系及动坐标系原点重合, 如图 2 所示。图中,  $G$  为陀螺重心,  $OG = l, K$  与  $k$  分别为单位矢量。重力对  $O$  点力矩为

$$M = lk(-mgK)$$

式中  $K$  在动坐标系下各坐标轴的投影为

$$K = \sin q \sin y i + \sin q \cos y j + \cos q k$$

故陀螺运动所满足的 Euler 方程为

$$\begin{cases} I_1 \dot{w}_x - (I_2 - I_3) w_y w_z = mgl \sin q \cos y \\ I_2 \dot{w}_y - (I_3 - I_1) w_z w_x = -mgl \sin q \sin y \\ I_3 \dot{w}_z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

令  $a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}, b = \frac{mgl}{I_1}, b_2 = \frac{mgl}{I_2}, c_1 = \frac{1}{I_1}, c_2 = \frac{1}{I_2}, c_3 = \frac{1}{I_3}, (w_1, w_2, w_3) = (w_x, w_y, w_z)$ 。

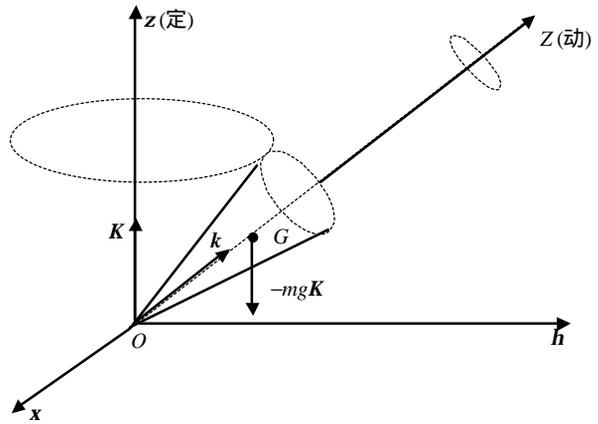


图2 陀螺运动图

2.2 控制器设计的逆系统方法

要使刚体在动坐标系下角速度稳定跟踪指令  $R(t)$ , 即  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (w(t) - R(t)) = 0$ , 令  $u_1 = M_x, u_2 = M_y, u_3 = M_z$ , 则由式(2), 在外力矩  $M = (u_1, u_2, u_3)$  作用下刚体所成系统为

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{w}_1 = a_1 w_2 w_3 + b_1 \sin q \cos y + c_1 u_1 \\ \dot{w}_2 = a_2 w_3 w_1 - b_2 \sin q \sin y + c_2 u_2 \\ \dot{w}_3 = c_3 u_3 \end{cases} \quad (3)$$

$$Y = w, \quad U(t_0) = 0$$

现希望用外力矩使陀螺运动呈图3形式, 即  $w = R = (0, 0, r)^T$ ,  $r$  为常数。

首先求逆系统

$$\dot{Y} = \dot{w} = \begin{cases} a_1 w_2 w_3 + b_1 \sin q \cos y + c_1 u_1 \\ a_2 w_3 w_1 - b_2 \sin q \sin y + c_2 u_2 \\ c_3 u_3 \end{cases}$$

得

$$U = \begin{cases} I_1 \dot{y}_1 - a_1 I_1 w_2 w_3 - b_1 I_1 \sin q \cos y \\ I_2 \dot{y}_2 - a_2 I_2 w_3 w_1 + b_2 I_2 \sin q \sin y \\ I_3 \dot{y}_3 \end{cases}$$

则逆系统为

$$\hat{\Sigma} : \begin{cases} \dot{w}_1 = \dot{y}_1 \\ \dot{w}_2 = \dot{y}_2 \\ \dot{w}_3 = \dot{y}_3 \end{cases} \quad U = \begin{bmatrix} I_1 \dot{y}_1 - a_1 I_1 w_2 w_3 - b_1 I_1 \sin q \cos y \\ I_2 \dot{y}_2 - a_2 I_2 w_3 w_1 + b_2 I_2 \sin q \sin y \\ I_3 \dot{y}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{输出})$$

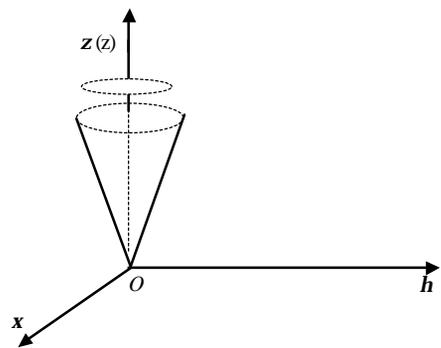


图3 陀螺运动目标位置

令  $\dot{y}_1 = \mathbf{f}_1, \dot{y}_2 = \mathbf{f}_2, \dot{y}_3 = \mathbf{f}_3$  为输入, 则可构成 1 阶积分逆系统  $\hat{\Sigma}_1$ , 再将 1 阶积分逆系统  $\hat{\Sigma}_1$  与原系统  $\Sigma$  串联, 则构成伪线性系统  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3 \rightarrow \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 。

再令输入输出满足  $\dot{Y}(t) + \text{diag}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)Y(t) = R(t)$ , 其中  $\mathbf{a}_i (i=1,2,3)$  待定。由常微分方程理论可解出

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{a}_1} R_1(t) + \left[ y_1(t_0) - \frac{R_1(t_0)}{\mathbf{a}_1} \right] e^{\mathbf{a}_1 t_0 - \mathbf{a}_1 t} - \frac{1}{\mathbf{a}_1} e^{-\mathbf{a}_1 t} \int_{t_0}^t R_1'(t) e^{\mathbf{a}_1 t} dt \\ \frac{1}{\mathbf{a}_2} R_2(t) + \left[ y_2(t_0) - \frac{R_2(t_0)}{\mathbf{a}_2} \right] e^{\mathbf{a}_2 t_0 - \mathbf{a}_2 t} - \frac{1}{\mathbf{a}_2} e^{-\mathbf{a}_2 t} \int_{t_0}^t R_2'(t) e^{\mathbf{a}_2 t} dt \\ \frac{1}{\mathbf{a}_3} R_3(t) + \left[ y_3(t_0) - \frac{R_3(t_0)}{\mathbf{a}_3} \right] e^{\mathbf{a}_3 t_0 - \mathbf{a}_3 t} - \frac{1}{\mathbf{a}_3} e^{-\mathbf{a}_3 t} \int_{t_0}^t R_3'(t) e^{\mathbf{a}_3 t} dt \end{pmatrix}$$

设  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{t_0}^t R_i'(t) e^{\mathbf{a}_i t} dt}{e^{\mathbf{a}_i t}} = 0 (i=1,2,3)$ , 则只需数  $\mathbf{a}_i > 0$ , 即可使  $Y(t)$  渐进跟踪  $R(t)$ 。这里应取

$\mathbf{a}_i = 1 (i=1,2,3)$ , 即输入输出应满足  $\dot{Y}(t) + Y(t) = R(t)$ , 预期传递矩阵为  $\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$ 。

令  $\mathbf{j} = R - Y$ , 陀螺跟踪控制结构如图 4 所示, 通过图中虚线部分得出的控制力矩  $U$ , 可使陀螺的运动呈图 3 状态, 即达到渐进跟踪  $R(t) = \begin{pmatrix} o \\ o \\ r \end{pmatrix}$  的目的。

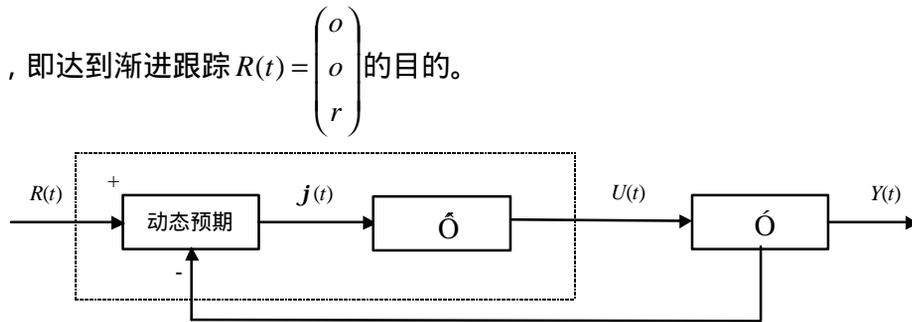


图 4 陀螺跟踪控制结构

参 考 文 献

- 1 Kovalev A.M. The Controllability,observability and coherence of control system, Kiev, Science Research, In Russian, 1993, 137-141
- 2 李春文, 冯元琨. 多变量非线性控制的逆系统方法. 北京: 清华大学出版社, 1991: 48-52
- 3 周衍柏. 理论力学教程. 北京: 高等教育出版社, 1985
- 4 葛 友, 李春文, 孙政顺. 逆系统方法在电力系统综合控制中的应用. 中国电机工程学报, 2001, 4(4): 1-6