

# 连续时延神经网络的Hopf分岔现象研究

李绍荣\* 廖晓峰

(电子科技大学光电信息学院 成都 610054)

**【摘要】**讨论了带连续时延神经网络的Hopf分岔现象。对于强核和弱核的情况，利用平均时延作为分岔参数，证明了模型经历了Hopf分岔过程。在带弱核的神经网络模型中，得到了分岔周期解稳定性准则。给出了一些数值例子，通过计算机仿真验证了所得结论的正确性。

**关键词** Hopf分岔; 连续时延; 神经网络; 周期解; 稳定性

中图分类号 TN711.4

## Study of Bifurcation Phenomenon for Neural Network with Continuously Time Delay

Li Shaorong Liao Xiaofeng

(College of Opto-electronic Information., UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** In this paper, we study the Hopf bifurcation phenomena of a neural network with a continuous time delay. Using the average time delay as bifurcation parameter, we have proved that the model undergoes a sequence of Hopf bifurcations in both the strong kernel and weak kernel cases. Stability criteria for the bifurcating periodic solutions are derived in the neural network with weak kernel. Some numerical examples and the computer simulation results are also presented to justify the theoretical results.

**Key words** Hopf bifurcation; continuous time delay; neural network; periodic solution; stability

神经网络是一个非常复杂的动力学系统，系统可能出现稳定、不稳定、振荡和混沌行为，文献[1~10]讨论了稳定性和振荡现象。在神经网络中时延对系统有相当大的影响，一些非静态现象，如不稳定性与周期波动也可能出现在带时延的神经网络中<sup>[5~10]</sup>。文献[5]讨论了离散时延神经网络的动态性质，文献[6~10]利用Lyapunov函数获得了带离散时延神经网络渐近稳定性的充分条件。本文讨论一个带连续时延神经网络模型的分岔现象。对于强核和弱核，利用平均时延作为分岔参数，证明出现了Hopf分岔，即当分岔参数通过某一临界值时，一族周期解从平衡点分岔。通常，确定时延系统分岔周期解的稳定性非常困难<sup>[11]</sup>。在带弱核的神经模型中，用文献[12]的算法，得到了判定分岔周期解稳定性的准则，并用计算机模拟说明所得结果的正确性。

### 1 连续时延神经网络模型与Hopf分岔的存在性

记 $x(t)$ 为一个神经元激活水平，神经元能通过动态阈值来调节自激活并依赖于其以前的激活。研究如下神经网络模型<sup>[6]</sup>

2001年12月3日收稿

\* 男 37岁 大学 讲师

$$\frac{dy}{dt} = -y(t) + a \tanh[y(t)] - ab \int_{-\infty}^0 F(-s) \tanh[y(t+s)] ds \quad (1)$$

式中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  均为非负数；权函数  $F(s)$  是定义在  $[0, \infty]$  上的非负有界函数，它描述了以往结果对当前动态性质的影响。讨论如下弱核

$$F(s) = \mathbf{a} e^{-\mathbf{a}s} \quad \mathbf{a} > 0 \quad (2)$$

利用文献[6]的结果，假设  $a, b$  使

$$a > 0 \quad b = 0 \quad a(1-b) < 1 \quad (3)$$

所以系统(1)有唯一平衡点  $y(0) \equiv 0$ 。将式(1)Taylor展开，有

$$\frac{dy}{dt} = Ly(t) + \int_{-\infty}^0 K(s)y(t+s)ds + H(y) + \text{高阶项} \quad (4)$$

式中  $L = -(1-a)$ ,  $K(s) = -abF(-s)$ ,  $H(y) = -\frac{a}{3}y^3(t) + \frac{ab}{3} \int_{-\infty}^0 F(-s)y^3(t+s)ds$ 。

线性化系统的特征方程为

$$D(\mathbf{I}) = \mathbf{I} + (1-a) + ab \int_{-\infty}^0 F(-s)e^{I s} ds \quad (5)$$

如果  $F(s)$  是弱核，即  $F(s) = \mathbf{a} e^{-\mathbf{a}s}$ ,  $\mathbf{a} > 0$ ，则式(5)变为二阶代数方程

$$\mathbf{I}^2 + (1-a+\mathbf{a})\mathbf{I} + \mathbf{a}[1-a(1-b)] = 0 \quad (6)$$

定义  $b_1 = b_1(\mathbf{a}) = 1-a+\mathbf{a}$ ,  $b_2 = b_2(\mathbf{a}) = \mathbf{a}[1-a(1-b)] > 0$ 。

如果  $b_1(\mathbf{a}) > 0$ ，即  $\mathbf{a} > a-1$ ，且  $a > 1$ ，则由Routh-Hurwitz准则，平衡点  $y^* = 0$  是局部渐近稳定的，如果

$$\mathbf{a}_0 = a-1 \quad a > 1 \quad (7)$$

则  $b_1(\mathbf{a}_0) = 0$ ，并且特征方程有一对纯虚根  $\mathbf{I}_{1,2} = \pm i\mathbf{w}_0$ ，这里  $\mathbf{w} = \sqrt{-b_2(\mathbf{a})}$ ，容易计算

$$\frac{d}{d\mathbf{a}} [\text{Re } \mathbf{I}_1]_{\mathbf{a}_0} = -\frac{1}{2} \quad (8)$$

因此，上面的分析可概括为：

**定理1** 如果  $a > 1$  且  $\mathbf{a} > a-1$ ，则系统(1)的平衡点  $y^* = 0$  是局部渐近稳定的。如果满足式(8)，那么当  $\mathbf{a}$  通过临界值  $\mathbf{a}_0$  时，在平衡点  $y^* = 0$  有Hopf分岔

## 2 分岔周期解的稳定性

假设核是弱核，即  $F(s) = \mathbf{a} e^{-\mathbf{a}s}$ ,  $\mathbf{a} > 0$ 。先将系统(1)变为算子方程

$$\frac{dy_t}{dt} = ay_t + Fy_t \quad (9)$$

式中  $y_t = y(t+\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{q} \in (-\infty, 0)$ ，且算子  $A$  和  $F$  定义为

$$A\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{q})}{d\mathbf{q}} & -\infty < \mathbf{q} < 0 \\ L\mathbf{f}(\mathbf{q}) + \int_{-\infty}^0 K(s)\mathbf{f}(s)ds & \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$F\mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 0 & -\infty < \mathbf{q} < 0 \\ -\frac{a}{3}\mathbf{f}^3(0) + \frac{ab}{3} \int_{-\infty}^0 F(-s)\mathbf{f}^3(s)ds & \mathbf{q} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

注意到算子  $A$  依赖于分岔参数  $\mathbf{a}_0$ ，由定理1，当  $\mathbf{a}$  通过  $\mathbf{a}_0$  时出现Hopf分岔。令

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \quad (12)$$

则  $\mathbf{m} = 0$  时出现Hopf分岔。  $A$  的伴随算子定义为

$$A^* \mathbf{j}(\mathbf{d}) = \begin{cases} -\frac{d\mathbf{j}(\mathbf{d})}{d\mathbf{d}} & 0 < \mathbf{d} < +\infty \\ L^T \mathbf{j}(\mathbf{d}) + \int_{-\infty}^0 K^T(s) \mathbf{j}(-s) ds & \mathbf{d} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中  $L^T$  和  $K^T$  是矩阵  $L$  和  $K$  的转置, 注意到  $A$  和  $A^*$  可能有复特征向量, 因而设  $\mathbf{f}, \mathbf{j}: (0, +\infty) \rightarrow c^2$ , 定义双线性形式

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{j} \rangle = \bar{\mathbf{j}}^T(0) \cdot \mathbf{f}(0) - \int_{q=-\infty}^0 \int_{x=0}^q \bar{\mathbf{j}}^T(x-q) \mathbf{f}(x) dx dq \quad (14)$$

为了确定算子  $A$  的 Poincare 规范形式, 需要计算  $A$  属于特征值  $i\mathbf{w}_0$  的特征向量  $\mathbf{q}$  和  $A^*$  属于特征值  $-i\mathbf{w}_0$  的特征向量  $\mathbf{q}^*$ , 即

$$\mathbf{q}(\mathbf{q}) = \exp(i\mathbf{w}_0) \quad -\infty < \mathbf{q} < 0 \quad (15)$$

$$\mathbf{q}^*(s) = D \exp(i\mathbf{w}_0 s) \quad 0 < s < +\infty \quad (16)$$

$$\text{式中 } D = \frac{(\mathbf{a}^2 - \mathbf{w}_0^2)(\mathbf{a}^2 - \mathbf{w}_0^2 - \mathbf{a}ab) + 4\mathbf{a}^2\mathbf{w}_0^2}{(\mathbf{a}^2 - \mathbf{w}_0^2 - \mathbf{a}ab) + 4\mathbf{a}^2\mathbf{w}_0^2} + i \frac{2\mathbf{a}^2 ab \mathbf{w}_0^2}{(\mathbf{a}^2 - \mathbf{w}_0^2 - \mathbf{a}ab) + 4\mathbf{a}^2\mathbf{w}_0^2}$$

$$\langle \mathbf{q}^*, \mathbf{q} \rangle = 1, \langle \mathbf{q}^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle = 0 \quad (17)$$

利用文献[15]中的相当记号, 先构造在  $\mathbf{m} = 0$  ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$ ) 处的中心流形  $F$ , 设

$$Z(t) = \langle \mathbf{q}^*, y_t \rangle \quad (18)$$

$$w(t, \mathbf{q}) = y_t - 2\text{Re}\{Z(t)q(\mathbf{q})\} \quad (19)$$

在中心流形  $F$ ,  $w(t, \mathbf{q}) = w(Z(t), \bar{Z}(t), \mathbf{q})$ , 这里

$$w(Z, \bar{Z}, \mathbf{q}) = w_{20}(\mathbf{q}) \frac{Z^2}{2} + w_{11}(\mathbf{q}) \frac{\bar{Z}^2}{2} + w_{30}(\mathbf{q}) \frac{Z^3}{3} + \dots \quad (20)$$

式中  $Z$  和  $\bar{Z}$  是中心流形  $F$  在方向  $\mathbf{q}^*$  和  $\bar{\mathbf{q}}$  上的局部坐标, 如果  $y_t$  为实, 则  $w$  也为实。

对于系统(9)的解  $y_t \in F$ , 因为  $\mathbf{m} = 0$

$$\dot{Z}(t) = i\mathbf{w}_0 Z(t) + g(Z, \bar{Z}) \quad (21)$$

式中

$$g(Z, \bar{Z}) = [\bar{q}^*(0)]^T F(w(Z, \bar{Z}, 0) + 2\text{Re}\{Z(t)q(0)\}) \quad (22)$$

在中心流形上将  $g(Z, \bar{Z})$  展开为  $Z$  和  $\bar{Z}$  的幂级数

$$g(Z, \bar{Z}) = g_{20} \frac{Z^2}{2} + g_{11} Z\bar{Z} + g_{02} \frac{\bar{Z}^2}{2} + g_{21} \frac{Z^2\bar{Z}}{2} + \dots \quad (23)$$

$F$  的分量是

$$w + Zq(\mathbf{q}) + \bar{Z}\bar{q}(\mathbf{q}) = w(\mathbf{q}) + Z \exp(i\mathbf{w}_0 \mathbf{q}) + \bar{Z} \exp(-i\mathbf{w}_0 \mathbf{q}) \quad (24)$$

因此

$$F(w + 2\text{Re}\{Z(t)q(\mathbf{q})\}) = \begin{cases} 0 & -\infty < \mathbf{q} < 0 \\ f_0 & \mathbf{q} = 0 \end{cases}$$

这里

$$f_0 = -\frac{a}{3} (w(0) + Z + \bar{Z})^3 + \frac{ab}{3} \int_{-\infty}^0 \mathbf{a} \exp(w(s) + Ze^{i\mathbf{w}_0 s} + \bar{Z}e^{-i\mathbf{w}_0 s}) ds$$

展开函数  $g(Z, \bar{Z})$ , 有  $g_{20} = 0, g_{11} = 0, g_{02} = 0, \frac{g_{21}}{2} = \bar{D} \left\{ \frac{\mathbf{a}^2 a(b-1) - a\mathbf{w}_0^2}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{w}_0^2} - i \frac{ab\mathbf{w}_0}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{w}_0^2} \right\}$ 。因此, 能计算出

参数  $C_1$ 、 $\mathbf{m}$ 、 $\mathbf{b}$  为

$$C_1 = \overline{D} \left\{ \frac{a^2 a(b-1) - a w_0^2}{a^2 + w_0^2} - i \frac{a b w_0}{a^2 + w_0^2} \right\}$$

$$m_2 = 2[a^2 a(b-1) - a w_0^2][(a^2 - w_0^2)(a^2 - w_0^2 - a b) + 4 a^2 w_0^2] + 4 a^3 a^2 b^2 w_0^2$$

$$b_2 = 2[a^2 a(b-1) - a w_0^2][(a^2 - w_0^2)(a^2 - w_0^2 - a b) + 4 a^2 w_0^2] + 4 a^3 a^2 b^2 w_0^2$$

定理2 在定理1中描述的Hopf分岔方向是由  $m_2$  的符号决定，如果  $m_2 > 0(m_2 < 0)$ ，则对  $a > a_0(a < a_0)$ ，分岔周期解存在；如果  $b_2 < 0(b_2 > 0)$ ，则周期解是稳定的。

### 3 数值例子

对于弱核情形，不同  $a, b$  时所得的各个参数值如表1所示。

表1 不同  $a, b$  时的参数值

$a$	$b$	$a_0$	$w_0$	$\overline{D}$	$ReI(a_0)$	$C_1(0)$	$m_2$	$b_2$
2.00	1.00	1.00	1.000	0.5 - i0.5	- 0.5	- 1	- 2.000	- 2.000
4.00	1.25	3.00	2.449	- 1.103 7 - i2.241	- 0.5	- 67.769 3+i74.161 4	- 131.540	- 131.540
1.75	0.93	0.75	0.918	1.421 7 - i0.533	- 0.5	- 1.950 6 - i0.455 2	- 3.901	- 3.901
1.25	1.75	0.25	0.696	1.720 3 - i0.328	- 0.5	- 1.847 5 - i0.338 3	- 3.694	- 3.694

为了模拟系统(1)，取  $a=2, b=1$ ，当  $a > 1$  时计算证明平衡点  $y^* = 0$  是稳定的，计算机模拟如图1和图2所示，此时  $a=1.1$ 。当  $a$  通过临界值  $a_0 = 1$ ， $y^* = 0$  失去它的稳定性并且出现Hopf分岔。因为  $b_2 < 0$ ，故周期解是稳定的，其波形图和相图如图3和图4所示。

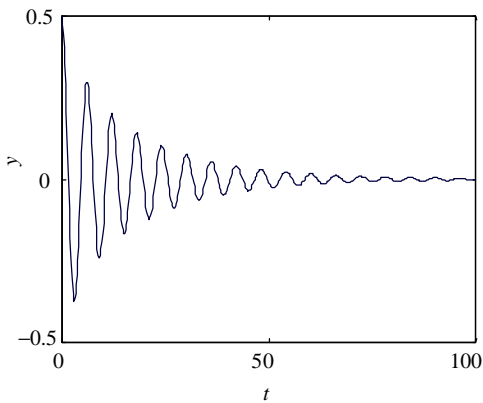


图1  $a=2, b=1, a=1.1$ 时的波形图

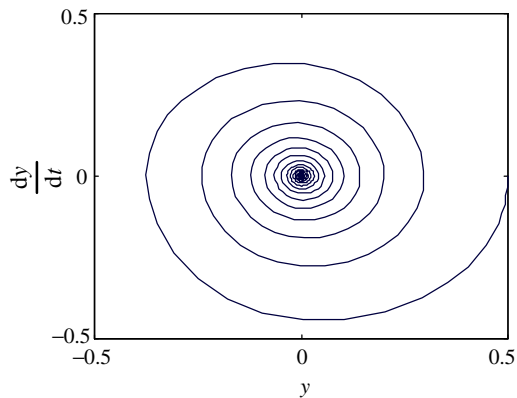


图2  $a=2, b=1, a=1.1$ 时的相图

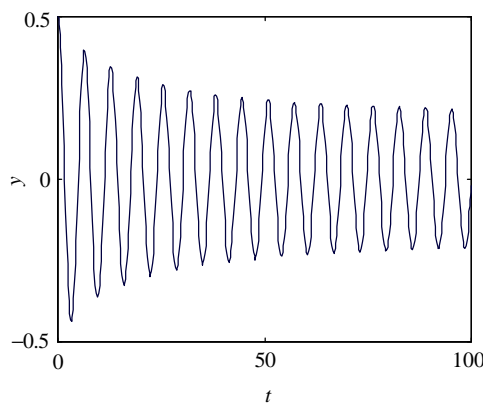


图3  $a=2, b=1, a=0.9$ 时的波形图

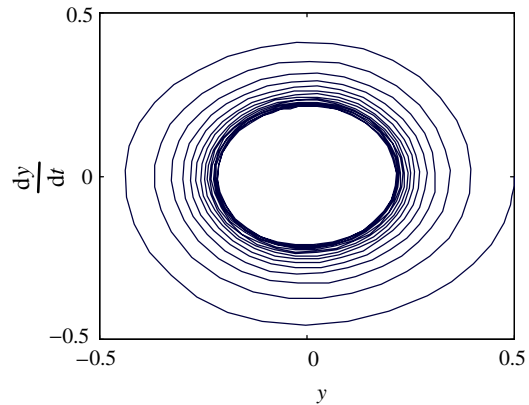


图4  $a=2, b=1, a=0.9$ 时的相图

## 4 结束语

本文研究了带连续时延神经网络模型的动态现象, 利用平均时延作为分岔参数, 证明了当这个参数通过临界值时出现Hopf分岔, 且详细研究了分岔周期解的稳定性。对于网络其他的动态行为, 如倍周期、混沌现象等, 有待作进一步深入研究。

### 参 考 文 献

- 1 Hopfield J J. Neurons with graded response have collective computational properties likes two-state neuron. Proc. Nati. Acad, Sci, 1984, 81: 3 088-3 092.
- 2 Hopfield J J, Tank D W. Computing with neural circuits: A model, Science, 1986, 233: 625-633
- 3 Cohen M A, Grossberg S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. IEEE Trans. Syst. Man Cyber, 1983, 13(5): 815-826.
- 4 Chua L O, Roska T. The CNN paradigm. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1993, 40: 147-156
- 5 Baldi P, Atiya A F. How delays affect neural dynamics and learning. IEEE Trans. Neural Networks, 1994, 5: 612-621
- 6 Gopalsmay K, Issic K C. Leung, Convergence under dynamical thresholds with delays. IEEE. Trans. Neural Networks, 1994, 8(2): 341-348
- 7 Gopalsmay K, He X Z. Stability in asymmetric Hopfield net with transmission delays. Physica D, 1994, 76: 344-358
- 8 Marcus C M, Westervelt R M. Stability of analog neural networks with delay. Phys Rev A, 1989, 39: 347-359
- 9 Liao Xiaofeng, Yu Juebang. Qualitative Analysis of Bi-directional Associative Memory with Time Delay. International Journal of circuit Theory and Applications, 1998, 26: 219-229
- 10 Liao Xiaofeng, Yu Juebang. Robust interval Stability Analysis for Hopfield with delay. IEEE Trans. On Neural Networks, 1998, 9(5): 1 042-1 045
- 11 Huang Q, Wei J, Wu J, *et al.* Direction and Stability of bifurcation periodic solutions in predator-prey systems with discrete delay, in Differential Equations and Control Theory, Lecture Notes in Pure and Appl. Math, Marcel. Dekker, New York, 1996, 176: 107-119
- 12 Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation, Cambridge, Univ. Press, 1981
- 13 Hale J, Kacmak H. Dynamics and bifurcation' s, Texts in Applied Mathematics-3. New York, spring-Verlag, 1996
- 14 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vectors Fields, Spring-Verlag. New York, 1983