同轴波导FEL放大器的非线性分析*

史宗君**　　杨梓强　　梁　正

(电子科技大学物理电子学院　成都　610054)

【摘要】以同轴波导、同轴混合磁铁摇摆器为模型，导出了自洽的注波三维非线性方程组，在考虑了电子初始速度零散效应、空间电荷波效应的影响及电子注在互作用区入口处的绝热压缩过程的基础上，编制了相应的计算软件。同时，通过数值分析的方法研究了自由电子激光器的饱和效率、频带宽度等高频特性和变参数摇摆器结构对延缓饱和、提高效率的作用。

关　键　词　同轴混合磁铁摇摆器;　自由电子激光器;　空间电荷波效应;　饱和效率;　带宽

中图分类号　O441.4

Nonlinear Analysis of FEL Amplifier Based on Coaxial Waveguide

Shi Zongjun　　Yang Ziqiang　　Liang Zheng

(College of Physical Electronics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　A set of coupled nonlinear differential equations of the FEL amplifier are derived in three dimensions for a configuration consisting of a coaxial waveguide and a coaxial hybrid wiggler. These equations include the effects of electron momentum spread, space-charge effects and wiggler taper governing the self-consistent evolution of TE mode and trajectories of an ensemble of electrons. The initial conditions are chosen to model the adiabatic injection of a annular electron beam. Computer program based on these equations is made and nonlinear including saturation efficiency and bandwidth is analyzed.

Key words　coaxial hybrid wiggler;　free-electron laser;　space-charge effects;　saturation efficiency;　bandwidth

自由电子激光器(FEL)是一种重要的强相干辐射源，具有频带宽、频率连续可调等特点[1,2]，在军用和民用领域都有着广泛的开发和应用前景。世界上许多科研机构相继在这一领域开展了研究工作并取得了一些重要的成果。

为了获得低电压下高效率、短波长的自由电子激光，并同时满足小型化的要求，则需要减小摇摆器的周期、降低FEL的工作电压，一般来说，摇摆器周期缩短其磁场幅度也随之降低，这将影响FEL的效率和增益，基于上述原因由R H Jackson等人提出并发明了同轴混合磁铁摇摆器[3,4]。这种摇摆器相对于螺旋摇摆器及平板摇摆器而言，工作在短周期的摇摆器磁场条件下，也能够得到相对高的磁场幅度。本文采用同轴波导、同轴混合磁铁摇摆器的结构作为FEL放大器模型，用三维非线性理论，讨论FEL的工作方程组和电子注发射度、空间电荷波与效率的关系，以及摇摆器渐变结构设计的可行性。

2002年3月7日收稿

* 国家自然科学基金资助项目，编号：60178011

** 女　28岁　硕士生

1 基本方程

1.1 物理模型及摇摆场

首先考虑如下物理模型：环形相对论电子注通过一个不计损耗的同轴波导，选用同轴混合磁铁摇摆器，如图1所示。其磁场为[3,4]

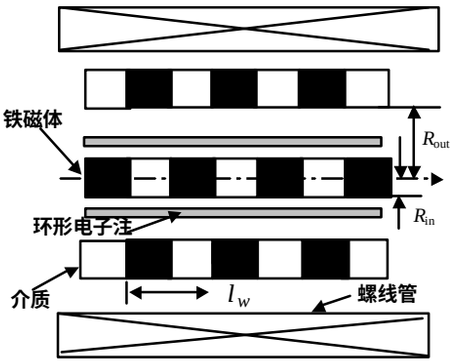

图1 FEL结构示意简图

$$B_z(r,z)=B_0+B_w\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nk_w z)\frac{[S_nI_0(nk_wr)-T_nk_0(nk_wr)]}{G(nk_wR_{out},nk_wR_{in})} \quad (1)$$

$$B_r(r,z)=B_w\sum_{n=1}^{\infty}\sin(nk_w z)\frac{[S_nI_1(nk_wr)+T_nK_1(nk_wr)]}{G(nk_wR_{out},nk_wR_{in})} \quad (2)$$

式中的有关参数可参考文献[3]，R_{in}, R_{out} 如图1所示。为了把电子送到稳定轨道上，电子注要求被绝热压缩地注入互作用区。在摇摆器入口处的 N_w 个周期内，磁场幅值需从零逐渐加至 B_w。由于要考虑变参数摇摆器结构，即磁场幅值在某一点 z_0 处需要逐渐减小。综合这些因素后,磁场幅值的变化应为

$$B_w(z)=\begin{cases} B_w\sin^2(k_wz/4N_w) & 0\le z\le N_wl_w \\ B_w \quad N_wl_w\le z\le z_0 & \\ B_w[1+e_wk_w(z-z_0)] & z>z_0 \end{cases} \quad (3)$$

式中 $e_w=\frac{1}{k_w}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\ln B_w$。

由于忽略了磁场幅度渐变引起的边缘场效应,所以式(3)只有在幅度渐变很小的时候才能被严格满足，即过渡周期数 N_w 要较大，而当 $z>z_0$ 时，要求 $|e_w|<<1$。

1.2 辐射场与工作方程组

电子注与辐射场的相互作用可以用有源Maxwell方程来描述

$$(\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla dj(\boldsymbol{x},t) \quad (4)$$

$$\nabla^2 dj(\boldsymbol{x},t)=-4\pi dr(\boldsymbol{x},t) \quad (5)$$

方程中的辐射场采用空波导中场的本征模式，因此可以用同轴波导中的TE、TM及TEM模式来表示。考虑到FEL的工作特性，以及摇摆器的结构，一般采用TE模式。虽然同轴波导中还存在TEM波，由于电子的同步电压与TEM波不同步，因此电子与TEM波之间几乎就没有能量交换。但TEM波的存在，电子的运动轨道在径向会有一定的扰动，可以采取措施在能量耦合进波导时让TEM波的比例成分减小，从而提高注波互作用的效率。假定 $dA(z)$ 与 $k(z)$ 一个周期内是自变量z的慢变函数，TE模式的矢势A可以写成[3~6]

$$d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\substack{l=0\\n=1}}^{\infty}dA_{ln}(z)\,[\frac{l}{k_{ln}r}Z_l(k_{ln}r)\sin a_{ln}\hat{e}_r+Z_l'(k_{ln}r)\cos a_{ln}\hat{e}_q] \quad (6)$$

$$a_{ln}=\int_0^z k_{ln}(z')\mathrm{d}z'+lq-wt \quad (7)$$

对空间电荷波的处理，采用如下一种简化模型[7]：假定电子注充满整个波导空间，然后用等离子体静电波即Gould-Trivelpiece模式来描述。因此标势可写成

$$dj(\boldsymbol{x},t)=\sum_{\substack{l=0\\n=1}}^{\infty}dj_{ln}(z)Z_l(k'_{ln}r)\cos a'_{ln} \quad (8)$$

$$a'_{\ln} = \int_0^z k'_{\ln}(z')\mathrm{d}z' + lq - wt \tag{9}$$

式中

$$Z_l(k_{\ln}r) = J_l(k_{\ln}r) + \Delta_{\ln} Y_l(k_{\ln}r) \tag{10}$$

$$\Delta_{\ln} = -\frac{J'(k_{\ln}b)}{Y'(k_{\ln}b)} \tag{11}$$

式中　J_j 与 J'_l 分别是第一Bessel函数及其导数；Y_l 与 Y'_l 分别是第二类Bessel函数及其导数；$k_{\ln}$ 和 $k'_{\ln}$ 是相应的截止波数；$k_{\ln}$ 和 $k'_{\ln}$ 是纵向波数；b是同轴波导外半径。

有源波动方程中的电流密度为[6]

$$d\boldsymbol{J} = -en_b \int \mathrm{d}\boldsymbol{p}_0 \mathrm{v}_{z0} F_0(\boldsymbol{p}) \iint_{A_g} \mathrm{d}x_0 \mathrm{d}y_0 s_{\perp}(x_0, y_0) \int_0^{\frac{2\pi}{w}} \mathrm{d}t_0 s_{//}(t_0) \boldsymbol{v}(z; \boldsymbol{p}_0, x_0, y_0, t_0) \times$$

$$d[\boldsymbol{x}_{\perp} - \boldsymbol{x}_{\perp}(z; \boldsymbol{p}_0, x_0, y_0, t_0)] \frac{d[t - t(z; \boldsymbol{p}_0, x_0, y_0, t_0)]}{|v_z(z; \boldsymbol{p}_0, x_0, y_0, t_0)|} \tag{12}$$

式中　n_b 是电子的平均密度；A_g 是波导横截面积；v_{z0} 是电子的初始纵向速度；$s_{\perp}$ 和 $s_{//}$ 及 $F_0(\boldsymbol{p}_0)$ 分别描述初始位置电子的空间分布和速度分布。若电子是空间均匀分布，则 $s_{\perp}$ 和 $s_{//}$ 的值为1。而 $F_0(\boldsymbol{p}_0) = A\exp[-(p_{z0} - p_0)^2 \Delta p_z^2] d(p_0^2 - p_{\perp}^2 - p_{z0}^2) H(p_{z0})$ 代表初始动量离散。A 是归一化常数，$H(x)$ 是Heaviside函数。

由于TE模式矢势的z方向分量为零，而空间电荷波可以认为由纵向电流产生，因此用

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial z} d\,j\right) = 4\pi dJ_z \tag{13}$$

代替Poisson方程(5)的求解，可使求解问题得到简化。

将矢势(6)和标势(8)代入方程(4)、(13)，在柱坐标系下推导出工作方程。利用慢变近似，在一个波周期内取平均，并在波导截面积分，利用三角函数正交关系及贝塞尔函数正交关系，可得到关于辐射波幅度和波数与电子注的耦和方程为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \frac{w^2}{c^2} - k_{\ln}^2 - k_{\ln}^2\right] d\,a_{\ln} = \frac{w_b^2}{c^2} H_{\ln} \left\langle \frac{v_r}{|v_z|} \frac{l}{k_{\ln} r} Z(k_{\ln} r) \sin a_{\ln} + \frac{v_q}{|v_z|} Z'_l(k_{\ln} r) \cos a_{\ln} \right\rangle \tag{14}$$

$$2k_{\ln}^{1/2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(k_{\ln}^{1/2} d\,a_{\ln}) = \frac{w_b^2}{c^2} H_{\ln} \left\langle \frac{v_r}{|v_z|} \frac{l}{k_{\ln} r} Z(k_{\ln} r) \cos a_{\ln} - \frac{v_q}{|v_z|} Z'_l(k_{\ln} r) \sin a_{\ln} \right\rangle \tag{15}$$

$$k'_{\ln} dj_{\ln} = -\frac{2w_b^2}{wc} \frac{1}{Z_{l+1}^2(k'_{\ln} b) - Z_{l+1}^2(k'_{\ln} a)} \langle Z_l(k'_{\ln} r) \cos a'_{\ln} \rangle \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} dj_{\ln} = -\frac{2w_b^2}{wc} \frac{1}{Z_{l+1}^2(k'_{\ln} b) - Z_{l+1}^2(k'_{\ln} a)} \langle Z_l(k'_{\ln} r) \sin a'_{\ln} \rangle \tag{17}$$

$$H_{\ln} = \frac{2k_{\ln}^2(b^2 - a^2)}{(k_{\ln}^2 b^2 - l^2) Z_l^2(k_{\ln} b) - (k_{\ln}^2 a^2 - l^2) Z_l^2(k_{\ln} a)} \tag{18}$$

式中　$\langle(\cdots)\rangle = \frac{A}{\pi^2 R_g^2} \iint_{A_g} \mathrm{d}q_0 \mathrm{d}r_0 r_0 s_{\perp}(r_0, q_0) \int_{-\pi}^{\pi} s_{//}(y_0) \mathrm{d}y_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}f_0 \int_0^{p_0} \mathrm{d}p_{z0} b_{z0} \exp[-(p_{z0} - p_0)^2 / \Delta p_z^2](\cdots)$；$y_0 = (-wt_0)$ 是有质动力波初始相位，$f_0 = \arctan(p_{y0}/p_{z0})$，$b_{z0} = n_{z0}/c$，$d\,a_{\ln} = ed\,A_{\ln}/mc^2$ 是归一化波幅度，$w_b^2 = 4\pi e^2 n_b / m$。电子的轨道方程为

$$n_z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \boldsymbol{P} = -e\,d\boldsymbol{E} - \frac{e}{c} \boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}} + d\boldsymbol{B}) \tag{19}$$

$$d\boldsymbol{B} = \nabla \times d\,\boldsymbol{A} \tag{20}$$

$$d\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} d\,\boldsymbol{A} - \nabla j \tag{21}$$

式中 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ext}}$是由式(1)、(2)给出的磁场，电子的位置方程及相位方程为

$$v_z \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} = v_r \tag{22}$$

$$v_z \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z} = \frac{v_q}{r} \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_l}{\mathrm{d}z} = k + lk_w - \frac{w}{v_z} \tag{24}$$

式中 y_l 是电子相对于有质动力势的相位

$$y_l = y_0 + \int_0^z \mathrm{d}z'(k + lk_w - \frac{w}{v_z}) \tag{25}$$

由此得到了关于注波互作用的自洽的、完备的微分方程。

2 数值分析

根据以上工作方程组，本文编制了具有独立知识产权的计算机模拟软件。在计算程序中，采用电子失去的动能与波得到的能量是否相符作为判断数值计算正确与否的依据。数值计算结果表明，电子失去的动能99%以上都能转化为波的能量，并且通过该软件验证了文献[3]中的有关结论。由此可见，运用该软件进行相关的数值计算是可行的。下面利用该软件对K波段同轴FEL放大器进行具体的数值模拟计算，模拟计算所用的主要参数如表1、表2所示。

表1 数值模拟计算参数

中心频率	工作模式	波导内半径	波导外半径	束电压	束电流	束内半径	束外半径
15 GHz	TE_{01} coaxial	1.4 cm	2.8 cm	200 kV	100 A	1.9 cm	2.3 cm

表2 数值模拟计算参数

摇摆器周期	摇摆器入口渐变周期数	摇摆器磁场幅值	导引磁场	输入功率
2.54 cm	5	0.32 T	0 .16 T	1 000 W

图2给出了考虑电子注发射度的功率演化曲线，可以看出，为了保证有较高的功率，归一化发射度应小于30π smm · mrad。电子注发射度为零时，图2得到的功率演化曲线与文献[3]给出的相关曲线吻合得非常好。计算程序中还考虑了摇摆器的渐变结构，渐变点从 $z/l_w = 13$开始，渐变度的选取对延缓饱和、提高效率有一定的影响，如图3所示。不难看出，渐变度$e_w = -0.002$ 时效果最好，但总的说来影响不是很大。从图2~4中可以看出曲线在大的趋势下有小的波动，这是由于电子在摇摆器的作用下，电子的纵向速度有一定的振荡所引起的。图4、图5给出了考虑空间电荷波效应的有关曲线，其中的实线代表计入空间电荷波的影响，虚线代表没有考虑空间电荷波的情况。计算结果表明，考虑空间电荷波效应时，同轴FEL的同步工作电压偏移到205 kV。从图中可以看出，空间电荷波效应使效率降低、增益下降，饱和点向后推延，同时空间电荷波效应还使频带变窄。

3 结 束 语

本文对同轴波导FEL放大器进行了详细的分析研究。结果显示，K波段下的同轴FEL摇摆器渐变结构对效率的影响不是很大；空间电荷波对效率和频带宽度有一定的影响；要获得较高的饱和效率，电子注发射度不能太大。文中导出的方程组具有通用性，只要代换高频场的结构，就可应用于其他类型的波导。此项工作对新型波导结构的探索有助于在提高效率、拓宽频带和便于系统

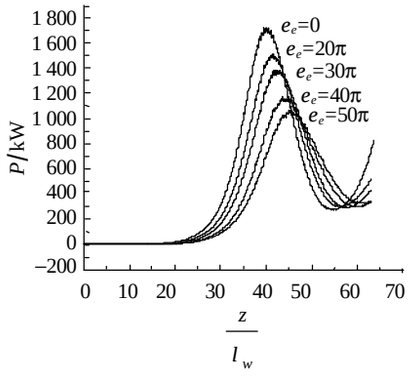

图2　计如电子发射度的功率演化曲线

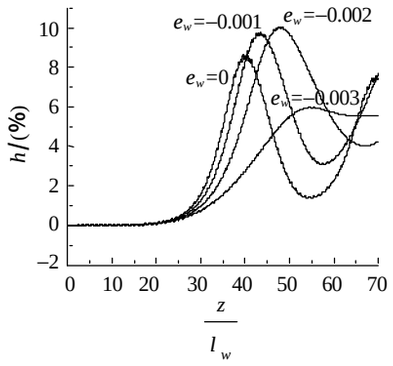

图3　摇摆器渐变对效率的影响

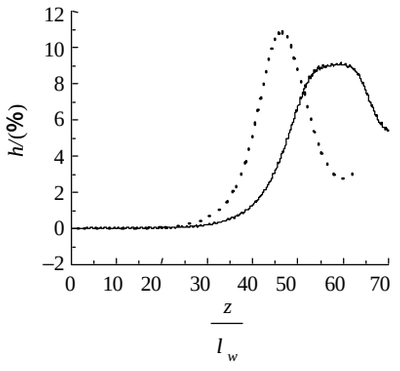

图4　效率演化曲线

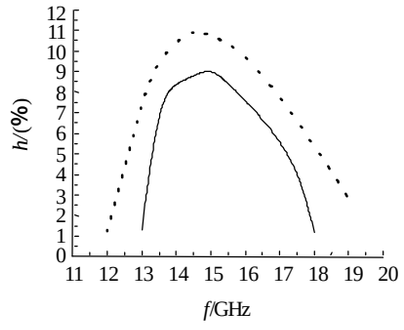

图5　频带曲线

设计等方面取得突破，对进一步研制新型的FEL放大器具有一定的指导意义，特别对FEL小型化设计有一定的启发性。同轴混合磁铁摇摆器只在一定程度上克服了一般摇摆器周期的缩短，其磁场幅度也将降低的缺点，能否在短周期的摇摆器中获得更高的磁场幅度，从而设计出性能更加优越的自由电子激光器，有待作进一步研究。

参 考 文 献

1　Yakover I M, Pinhasi Y, Gover A. Resonator design and characterization for the Israeli tandem electrostic FEL project. Nucl Instr and Meth A, 1995, (358): 323-326

2　Zheng X D, Shiho M, Maebara S, *et al.* A corrugated waveguide driven by the linac as a prebuncher and seed-power generator of mm-wave FEL. Nucl Instr and Meth A, 1998, (407): 198-202

3　Freund H P, Jackson R H, Pershing D E, *et al.* Nonliner theory of the Free-electron laser based upon a coaxial hybrid wiggler. Phys Plasmas 1 1994, (4): 1 046-1 059

4　Jackson R H, Freund H P, Pershing D E, *et al.* U S Patent 5: 499-255

5　张克潜，李德杰.微波与光电子学中的电磁理论. 北京：电子工业出版社，1997

6　Gunguly A K, Frenud H P. Nonlinear analysis of free-electron-laser amplifiers in three dimensions. Phys Fluids B, 1985, 32(4): 2 275-2 286

7　Freund H P. Three-dimensional nonlinear analysis of free-electron-laser amplifiers with planar wigglers. Phy Rev A, 1987, 36(5): 2 182-2 198