第 31 卷　第 3 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.31　No.3
2002 年 6 月　　Journal of UEST of China　　Jun. 2002

关于单模可微平顶函数 l_P 的唯一性

王伟钧[*1]　　陈　琳[2]

(1. 海通证券有限公司　成都　610015;　2. 成都电子机械高等专科学校　成都　610031)

【摘要】讨论了单模动力系统中，可微平顶函数及任何*MSS*序列*P*，存在某一依赖于该序列的特征参数具有唯一性。得出了梯形函数在区间(0, 0.382 9···)上对应于序列*P*的特征参数的唯一性及序列*P*大于周期三的特征参数的唯一性，从而在梯形函数的特殊情况下，单模可微平顶函数 l_P 具有的唯一性。

关　键　词　连续自映射；迭代；单模动力系统；*MSS*序列；可微平顶函数

中图分类号　O174

Uniqueness of l_P for Unimodal Differentiable Flat-top Functions

Wang Weijun[1]　　Chen Lin[2]

(1. Haitong Securities Corp.,Ltd.　Chengdu　610015;　2. Chengdu Electromechanical College　Chengdu　610031)

Abstract　Iterations of continuous self maps on the interval are the most simple model, which arise some interesting mathmatics structures, in dynamical systems. These systems depend on a characteristic parameter controlled with experiment. The paper discusses the contents of unimodal dynamical systems, proving the uniqueness of l_P and then one between 0 and 0.382 9 as unimodal differentiable flat-top functions for any *MSS* sequence *P*. It draws a conlusion from the uniqueness of *P*>*RL*, and therefore one of $P>RL^2$ in special circumstances for trapezoid functions.

Key words　continuous self map;　iteration;　unimodal dynamical systems;　*MSS* sequence;　differentiable flat-top function

1　问题的提出

文献[1]讨论了单模系统的内容，主要涉及到以下问题：设*P*是长为*K*的转移——极大序列[1]，$F:[0,1]\to[0,1], x_{n+1}=lF(x_n), l\in[0,1]$。若 $l=l_P$ 时，$\dfrac{1}{2}$ 的符号序列是 $P=P_1P_2\cdots P_K$。

$$P=\begin{cases} R & (l_PF)^i\left(\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{1}{2} \\ L & (l_PF)^i\left(\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2} \\ C & (l_PF)^i\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

本文讨论对于 F，l_P 的唯一性。

2002年1月6日收稿

* 男　38岁　硕士　工程师

文献[2]指出：一阶差分方程出现在生物、经济与社会等许多领域，其方程既简单又完全确定，还能呈现动力学性态系统(倍周期序列、丰富的动力学性态谱等[3])。某些涉及到轨道的细微结构数学形态；另一些则与实际含意及应用有关。理论与实际分析要求在自然界或计算机中频繁出现“混沌”现象的动力系统。如：Lorenz模型、描述化学反应的模型、生物、生态系统、政治、社会学模型等。许多实验表明，具有内在规律性的一般现象呈现出“混沌”状态。近年来，各个领域，尤其是物理学，函数迭代的研究已成为热点。在物理中，双稳定光学装置、化学反应、气体计数器等系统存在倍周期现象。区间上的连续自映射的迭代是动力系统中最简单的模型，若系统还依赖一个实验控制的特征参数，关于映射的轨道结构对于参数的依赖性、非周期性等问题已有研究[4]。因而研究 l_P 的唯一性十分有用。关于梯形函数和 $4x(1-x)$ 的存在性及唯一性已解决[5]。

2　唯一性定理

引理　若 $e\in(0,\frac{1}{2})$，则方程 $l^4-l^3+e^2\,l-\frac{e^3}{2}=0$ 在 $(\frac{1}{2},1)$ 上存在唯一的实根。设此实根为 l^e_{RLR}，则

$$l^e_{RLR}=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{8y+1}+\sqrt{A_1}}{4} & e\in(0,\dfrac{\sqrt{2}}{4})\\[2ex] \dfrac{1+\sqrt{8y+1}+\sqrt{A_2}}{4} & e\in(\dfrac{\sqrt{2}}{4},1)\end{cases} \tag{1}$$

式中　$y=\dfrac{e\sqrt[3]{1-2e}}{2}\left[\sqrt[3]{-\dfrac{1}{4}+\sqrt{\dfrac{11}{432}+\dfrac{2e}{27}}}-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}+\sqrt{\dfrac{11}{432}+\dfrac{2e}{27}}}\right]$

$$A_1=(1-\sqrt{8y+1})^2-16(y-\frac{y+e^2}{\sqrt{8y+1}})\qquad A_2=(1+\sqrt{8y+1})^2-16(y+\frac{y+e^2}{\sqrt{8y+1}})$$

定理 1　设 $F(x)$ 为单模可微平顶函数，倘若 $0<e<0.382\,9\cdots$，且

$$\left|F'(x)\right|\geq S(e)=\frac{1+l^e_{RLR}}{(l^e_{RLR})^2}\qquad x\in(0,e)\cup(1-e,1)$$

式中　l^e_{RLR} 满足式(1)。则对于任一 MSS 序列 P，若 l_P 存在，则唯一。

证明　本定理分以下两步分析：

1) $P=R$，结论成立。

2) $P>R$，令 $a=\inf\limits_{x\in(0,e)\cup(1-e,1)}\left|F'(x)\right|$，从文献[1](6.5)式知

$$\left|g'_P(l)\right|<\frac{1}{l(a\,l-1)}$$

在 $F(x)$ 为梯形函数时，可证明：当 $l\in[\frac{1}{2},l^e_{RLR}]$ 时，没有大于 R 的 MSS 序列与其对应，而 l^e_{RLR} 是以 e 为参数的梯形函数对应于 RLR 的 l 值，因而 l^e_{RLR} 满足方程

$$l^4-l^3+e^2\,l-\frac{e^3}{2}=0 \tag{2}$$

由引理得知 l^e_{RLR} 满足式(1)。设 $l\in[\,l^e_{RLR},1]$，得

$$\left|g'_P(l)\right|<\frac{1}{l^e_{RLR}(a\,l^e_{RLR}-1)}$$

又 $\dfrac{1}{l^e_{RLR}(a\,l^e_{RLR}-1)}\leq 1$ 与 $\dfrac{1+l^e_{RLR}}{{l^e_{RLR}}^2}\leq a$ 等价，当 $F(x)$ 为梯形函数时，$a=\dfrac{1}{e}$，从而

$$e \le \frac{{l^e_{RLR}}^2}{1+l^e_{RLR}} \tag{3}$$

记 $h(e,l)=l^4-l^3+e^2\ l-\dfrac{e^3}{2}$，则

$$\frac{\partial h(e,l)}{\partial e}=2le-\frac{3}{2}e^2=2e(l-\frac{3}{4}e)>0$$

因而 $h(e,l)$ 为 e 的增函数，由式(2)、式(3)，得

$$ {l^e_{RLR}}^4-{l^e_{RLR}}^3+\left(\frac{{l^e_{RLR}}^2}{1+l^e_{RLR}}\right)^2 l^e_{RLR}-\frac{1}{2}\left(\frac{{l^e_{RLR}}^2}{1+(l^e_{RLR})^2}\right)^3 \ge 0$$

即

$$ {l^e_{RLR}}^4+\frac{5}{2}{l^e_{RLR}}^3+{l^e_{RLR}}^2-2l^e_{RLR}-1\ge 0 \tag{4}$$

记 $S_1(x)=x^4+\dfrac{5}{2}x^3+x^2-2x-1, x\in[\dfrac{1}{2},1]$。令 $S_1(x)=0$，则在 $x\in[\dfrac{1}{2},1]$ 的实根为 x_0=0.839 2…。又当 $x\in[\dfrac{1}{2},1]$ 时，$S_1'(x)=4x^3+7.5x^2+2x-2>0$。因此 $S_1(x)$ 为 $x\in[\dfrac{1}{2},1]$ 的增函数。于是由式(4)及 $l^e_{RLR}\in[\dfrac{1}{2},1]$ 得，$l_{RLR}\ge$0.839 2…。当 $l=$0.839 2…时，求出 $h(e,l)=0$ 的根 e =0.382 9…。

对于方程 $h(e,l)=l^4-l^3+\mathrm{e}^2\ l-\dfrac{e^2}{2}$=0，如果 $l\ge$0.839 2…，则 $e\le$0.382 9…，反之亦然。事实上，当 $l\ge$0.839 2…时，$\dfrac{\partial h(e,l)}{\partial l}$=4$l^3-3l^2+e^2$>0, 即 $h(e,l)$ 关于 l 单调增；另一方面，$h(e,l)$ 为 e 的减函数。因此，当 $l\in[l^e_{RLR},1]$时，$|g_P'(l)|<1$，又 $g_P(1)=1,$ 从而，方程 $g_P'(l)=l$ 至多有1个实根。

推论　若 $F(x)$ 为梯形函数，且0< e <0.382 9…，则对于任一 MSS 序列 P，l_P 是唯一存在的。

现在证明有关 $l_P\,(P>RL, e\in(0,\dfrac{1}{2}))$ 唯一性的一个定理。设 $\overline{l}_e=l^e_{RL}$，其中 l^e_{RL} 是关于参数 e 的梯形函数对应于 RL 的 l 值。则 l^e_{RL} 为方程

$$l^3-l^2+\frac{e^2}{2}=0 \tag{5}$$

在($\dfrac{1}{2}$,1)的1个实根。

定 理 2　设 F 是单模可微平顶函数。对于任何 $P>RL$ 及 $e\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$l_P$ 是唯一的，只要 $a>U(e)$，其中 $U(e)$ 为多项式 $y(e,x)=\overline{l}_e^{\,4}x^3-\overline{l}_e\left(\overline{l}_e^{\,2}+e^2\right)x^2+e\left(e-\overline{l}_e\right)x+e-1$ 的最大零根。对于参数 $e\in(0，0.486\cdots)$ 的梯形函数，$a=\dfrac{1}{e}>U(e),$ 因此定理对梯形函数为真。

证明　对于任何 $P>RL$ (设 P 长度为 n)。P 中前三个符号一定为 RL^2。根据文献[1]引理6.1，0≤ $J_k(l)\le$1。首先证明 $l_P\ge\overline{l}_e$。假设 $l_P\ge\overline{l}_e$ 不成立，则存在 $P>R$，使 $l_P<\overline{l}_e$。由文献[1]定理5.2，存在一个 $l_{RL,}$ 满足 $l_R<l_{RL}<l_P$。这意味着 $l_{RL}<\overline{l}_e$，与文献[1]定理8.2.4矛盾。因此 $l_P\ge\overline{l}_e$。由文献[1]定理6.4，得

$$|g_P'(l)|\le\frac{1}{al^2}\left[J_{n-1}(l)+\frac{J_{n-2}(l)}{al}+\frac{J_{n-3}(l)}{a^2l^2}+\cdots+\frac{1}{2a^{n-1}l^{n-1}}\right] \tag{6}$$

若 $\dfrac{1}{2}\le l\le$1，则 $\forall\ e>0$，使

$$\mathrm{J}_{n-2}(l)=F_L^{-1}(\frac{1}{l}J_{n-3}(l))\leq e+e \tag{7}$$

因为 F_L^{-1} **在**$[0,\frac{1}{2}]$**上增加，若**$\bar{l}_e\leq l\leq 1$**，则**

$$\mathrm{J}_{n-1}(l)=F_L^{-1}(\frac{1}{l}J_{n-2}(l)) \tag{8}$$

但$\frac{J_{n-2}(l)}{l}\leq\frac{(e+e)}{\bar{l}_e}<\frac{1}{2}\bar{l}_e<1$**。现在**$F$ **在**$[0,\ e]$**上凸，则**$F(x)\leq ex$**，**$0\leq x\leq 1$**，因此**

$$J_{n-1}(l)\leq F_L^{-1}(\frac{e+e}{\bar{l}_e})\leq\frac{e(e+e)}{\bar{l}_e} \tag{9}$$

将式(8)**、式**(10)**代入式**(6)**，得**

$$|g'_P(l)|\leq\frac{1}{a\bar{l}_e^2}\left[\frac{(e+e)^2}{\bar{l}_e}+\frac{e+e}{a\bar{l}_e}+\frac{1}{a\bar{l}_e(a\bar{l}_e-1)}\right] \tag{10}$$

如果$a>U(e)$**，则**$y(e,a)>0$**。选择**$e>0$**为任意小，使**$y(e+e,a)>0$**，从而**$|g'_P(l)|<1$**。定理的第一部分得到证明。为证明**$a>U(e)$**对梯形函数也成立。首先注意到**

$$y'(e,x)=3l^4x^2-2l(l^2+e^2)x+e(e-l) \tag{11}$$

式中　$l=\bar{l}_e$**。**

由式(5)**，**$e^2=2(l^2-l^3)$**。故式**(11)**，即二次函数(抛物线函数,开口向上)的顶点横坐标为**

$$x_0=-\frac{-2l(l^2+e^2)}{2\times 3l^3}=\frac{1}{l}-\frac{2}{3}$$

因为$1\geq l\geq l_{RL}=0.809\cdots$**，且**$0<e<\frac{1}{2}$**，因此，**$\frac{1}{3}\leq x_0\leq 0.583\ 3\cdots$**，而**$y'(e,x)$**在**$(0.583\ 3\cdots,\ +\infty)$**增加，从而**$y(e,x)$**在**$(\frac{1}{e}$**，**$1)$**上增加(注意到**$\frac{1}{e}>2>0.583\ 3\cdots$**)。由式**(5)**得，**$e=l\sqrt{2(1-l)}$**，故**

$$e^2y'(e,\frac{1}{e})=3l^4-2el^3-3e^3l+e^4=l^4[3-2\sqrt{2-2l}+4(1-l)^2-6(1-l)\sqrt{2-2l}]\geq 0.673\ 4\cdots>0\text{。}$$

因此，$y'(e,x)>0$**，**$x\geq\frac{1}{e}$**，从而**$y(e,x)$ **在**$[\frac{1}{e},\infty]$**上增加。令**$h(e)=e^3y(e,\frac{1}{e})$**，得**$h(e)=l^4-el^3-2e^3l+2e^4-e^3$**，故**

$$\frac{\mathrm{d}h(e)}{\mathrm{d}e}=(4l^3-3el^2-2e^3)\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}e}+8e^3-3e^2-l^3-6e^2l \tag{12}$$

由式(5)**得**$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}e}=\frac{e}{2l-3l^2}<0$**，而**

$$4l^3-3el^2-2e^3=l^2(4l-3e)-2e^3>0.809^2\times(4\times 0.809-3\times 0.5)-2\times 0.5^2>0$$

$$l^3+6e^2l-8e^3+3e^2=l^3+12l(l^2-l^3)-16e(l^2-l^3)+6(l^2-l^3)=$$
$$l^2[l+(12l-16e+6)(1-l)]>0$$

因此，$\frac{\mathrm{d}h(e)}{\mathrm{d}e}<0$**，从而，**$h(e)>h(0.486\cdots)$**。当**$e=0.486\cdots$**时，由式**(5)**得**$l=0.827\cdots$**。这时**

$$h(0.486\cdots)=(0.827\cdots)^4-0.486\cdots\times(0.827\cdots)^3-$$
$$2\times(0.486\cdots)^3\times 0.827\cdots+2\times(0.486\cdots)^4-(0.486\cdots)^3\geq 0\text{。}$$

因此，$a=\frac{1}{e}>U(e)(0<e<0.486\cdots)$**。**

推论　**设**$F(x)$**是梯形函数，则对于任何**$P>RL^2$**和**$e\in(0,\frac{1}{2})$**，**l_P**唯一。**

3 结 束 语

区间上的连续自映射的迭代是动力系统中最简单的模型。本文利用实变的方法研究单模可微平顶函数及与*MSS*序列*P*相对应的 l_P 的唯一性问题，定理1给出的条件$e\in(0, 382\ 9\cdots)$比文献[1]中定理6.1的$e\in(0, 0.342\ 3\cdots)$更宽广，定理2则是对文献[1]定理7.1作了改进。

参 考 文 献

1 Beyer W A, Mauldin R D, Stein P R. Shift-maximal sequences in function iteration: existence,uniquess, and multiplicity. J.Math. Anal. And Appl. 1986, 115(2): 305-341

2 Douady A, Hubbard J H. Iteration des polynomes quadratiques comples. C.R. Acad. Aci. Paris, 1982, 294(1): 123-126

3 Kadanoff L P. Applications of scaling ideas to dynamics. NATO ASI Series, Series B:Physics 1985, 118(1): 27-43.

4 Collect P, Eckmann J P. Iterated maps on the interval as dynamical systems, birkhauser, Basel, 1980

5 Louck J D, Metropolis N C. Theory of trapezoidal maps and of universal sequences. Los Alamos preprint, 1983

6 May R M. Simple mathematical models with verycomplicated dynamics. 1976, Nature 261: 459-467

7 孙利祥. 论单模变换理论的符号字. 成都电讯工程学院学报, 1984, 14(1): 104-108

·简 讯·

中国科学家应该对世界科技发展做出更大贡献

中国科学院院长路甬祥院士5月28日在中科院第11次院士大会上作报告时指出，中国科学家必须审慎选择科技发展目标，集中有限资源，重点突破，在本世纪对世界科学技术发展做出更大贡献。

面对新世纪科技的发展，院士们要在自己的岗位上继续做出创新性的科学贡献，学部作为国家在科学技术方面的最高咨询机构，将承担“科学思想库”的重要责任。中国现代化建设对科技发展的需求、世界科技发展的态势、加入世界贸易组织和科技全球化带来的冲击与挑战以及国家科技资源的现实，决定了中国必须根据国际科学技术发展态势和国家需要，慎重选择战略目标，制定好科技发展战略。

一直工作在教学和科研第一线的院士们，对科技发展态势有着深刻的理解和全面的把握。根据经济建设、国家安全和可持续发展的需要，在选择关键领域、加强基础研究与重要高技术领域前沿的前瞻布局、加强原始性科学创新和关键技术创新与集成、制定科技和教育发展战略方面，学部有条件适时提出具有战略性、前瞻性的咨询报告。

中科院学部与国内外产业界和学术界有着广泛联系，在充分利用全球创新资源，广泛参与双边、多边和全球竞争，大幅度提升科技创新与产业化能力等方面，学部都可以发挥重要作用。中科院学部同时要加强与中国工程院、中国社会科学院及其他有关部门的联系与合作。

学部要注意培养青年科技工作者，在保证增选质量的前提下，及时将符合标准和条件的优秀中青年科学家选入院士队伍；要充分考虑新世纪学科发展的共性与特性，处理好传统学科与新兴学科、交叉学科之间的关系；要关注新兴学科和交叉学科的工作进展，对其优秀的学科带头人给予准确的评价。

通过中国科学家创造性的工作，通过与世界的广泛合作与交流，他们在21世纪一定会做出比20世纪大得多的贡献，中国将涌现出一批无愧于21世纪的世界级科学大师和工程技术大师。

·柳 笑·