第 31 卷　第 3 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.31　No.3
2002 年 6 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Jun. 2002

基于样条函数的小波尺度函数计算*

张建州**1　　王　玲2
(1. 四川大学计算机学院　成都　610065;　2. 电子科技大学电子工程学院　成都　610054)

【摘要】通过样条函数构造小波正交基是常用的方法。在用样条函数构造小波尺度函数时，对样条函数正交化，涉及样条函数的Fourier变换函数定义无穷级数的求和，导致计算很复杂。采用样条函数的性质，使无穷级数求和化为有限个整数点上的样条函数值的求和，有效地简化了计算。

关　键　词　小波；尺度函数；样条函数；正交化

中图分类号　O174.2

Computation of Wavelets Scaling Functions Based on Splines

Zhang Jianzhou1　　Wang Ling2
(1. College of Computer, Sichuan University, Chengdu　610065;　2. College of Electrical Engineering, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　Constructing orthonormal wavelet bases from splines is a method used often. But when wavelet scaling functions are constructed by splines, first step is orthogonalization, in which an infinite series defined by Fourier transform of splines is summed. The approaches used currently to sum the infinite series are complicated. In this paper, the summation of the infinite series defined by Fourier transform of splines is turned to sum a finite series defined by splines over integer by means of spline properties, therefore computation of the summation is efficiently simplified.

Key words　wavelets;　scaling function;　spline;　orthogonalization

文献[1]将样条函数引入小波分析，文献[2]为小波分析的专著，文献[3, 4]论述了小波函数在信号和图像处理及电磁计算中的应用。由于样条函数一般不是正交的，因此，为了构造小波正交基，首先要对其进行正交化，得到小波尺度函数，其中还涉及样条函数的Fourier变换函数定义的无穷级数求和。为求这个无穷级数的和，利用复变函数中级数求和的方法，对三阶以上样条函数计算太复杂。本文利用样条函数的性质，给出一个简单的计算方法。

1　样条函数的定义和表示

基本样条函数为

$$b^{0}(x)=\begin{cases}1 & |x|<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & |x|=\dfrac{1}{2}\\ 0 & |x|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

2001年9月13日收稿
* 四川省应用基础研究基金资助项目，编号：01SY51-09
** 男　39岁　博士　教授

$b^0(x)$的Fourier变换为

$$\hat{b}^0(w)=\int_{-\infty}^{+\infty}b^0(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}wx}\mathrm{d}x=\left(\sin\frac{w}{2}\right)\Big/\frac{w}{2}$$

n阶样条函数定义为$n+1$个基本样条函数的卷积，即

$$b^n(x)=b^0*b^0*\cdots*b^0(x)$$

式中 $*$表示卷积运算。$b^n(x)$是对称的，直接计算$b^n(x)$很困难，可通过$b^n(x)$的Fourier变换得到$b^n(x)$的显式表示。$b^n(x)$的Fourier变换为

$$\hat{b}^n(w)=\left[\left(\sin\frac{w}{2}\right)\Big/\frac{w}{2}\right]^{n+1}=\frac{(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{w}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{w}{2}})^{n+1}}{(\mathrm{j}w)^{n+1}}$$

记

$$(x)_+^n=\begin{cases}x^n & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

于是[3]

$$b^n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^k\left(x-k+\frac{n+1}{2}\right)_+^n$$

由此可知，$b^n(x)$的非零点在区域$\left[-\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2}\right]$内。

2 基于样条函数的小波尺度函数计算

由于样条函数不满足平移正交性条件，因此，样条函数不能直接用于正交小波基的尺度函数，但可以通过正交化处理得到正交小波基尺度函数$f(x)$的Fourier变换

$$\hat{f}(w)=\frac{\hat{b}^n(w)}{\left(\sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{b}^n(w+2\pi l)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$\hat{f}(w)$的计算涉及求$\sum\limits_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{b}^n(w+2\pi l)\right|^2$的和，将其展成Fourier级数，其Fourier展开系数为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}mw}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{b}^n(w+2\pi l)\right|^2\mathrm{d}w=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}mw}\left|\hat{b}^n w)\right|^2\mathrm{d}w=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}mw}\left[\left(\sin\frac{w}{2}\right)\Big/\frac{w}{2}\right]^{2n+2}\mathrm{d}w=b^{2n+1}(m)$$

于是

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{b}^n(w+2\pi l)\right|^2=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}b^{2n+1}(m)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}mw}$$

由于$b^{2n+1}(x)$的非零点在区域$[-(n+1),n+1]$内，$b^{2n+1}(m)$至多有$2n+1$项不等于0，即

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{b}^n(w+2\pi l)\right|^2=\sum_{m=-n}^{n}b^{2n+1}(m)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}mw}$$

再利用$b^{2n+1}(x)$的对称性得出

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left|\hat{b}^n(w+2\pi l)\right|^2=b^{2n+1}(0)+\sum_{m=1}^{n}2b^{2n+1}(m)\cos mw$$

3 例　子

以三阶样条函数为例，利用本文方法计算其对应的正交小波尺度函数。

三阶样条函数的Fourier变换为

$$\hat{b}^3(w)=\left[\left(\sin\frac{w}{2}\right)\Big/\frac{w}{2}\right]^4$$

非零 $b^7(m)$ 有(对称的值未写出)

$$b^7(-3)=\frac{1}{5\,040}\qquad b^7(-2)=\frac{120}{5\,040}\qquad b^7(-1)=\frac{1191}{5\,040}\qquad b^7(0)=\frac{2\,416}{5\,040}$$

代入第2节的 $\hat{f}(w)$，化简得出

$$\hat{f}(w)=\left[\left(\sin\frac{w}{2}\right)\Big/\frac{w}{2}\right]^4\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{w}{2}+\frac{2}{5}\sin^4\frac{w}{2}-\frac{4}{315}\sin^6\frac{w}{2}}}$$

4 结 束 语

本文利用样条函数的性质，给出一个计算样条函数生成正交小波基尺度函数的简单方法，计算实例说明了其有效性。这为从事信号和图像处理及电磁计算的工程技术人员使用样条小波提供了方便。

参　考　文　献

1 Battle G. A block spin construction of ondelettes, Part I: Lemarié functions, Commun. Math. Phys., 1987, 110: 601-605

2 崔锦泰著. 小波分析导论. 程正兴译. 西安: 西安交通大学出版社, 1995

3 Unser M. Splines — a perfect fit for signal and image processing. IEEE Signal Processing Magazine, 1999, 16(6): 22-38

4 Krumpholz M, Katehi L P B. MRTD: new time-domain schemes based on multiresolution analysis, IEEE Trans. on MTT, 1996, 44(4): 555-571

·科研成果介绍·

双面YBCO高温超导薄膜的两面同时溅射沉积技术

主研人员：李言荣　陶伯万　刘兴钊　姜　斌　罗　安　徐　进　何世明

双向YBCO高温超导薄膜的两面同时溅射沉积技术通过基片绕夹具转轴旋转，实现了采用单靶倒筒式直流溅射在基片两面同时原位沉积YBCO薄膜，保证了YBCO双面薄膜的两面一致性。同时，在YBCO双面同时溅射中引入了自外延生长技术，提高了YBCO薄膜的性能。并在溅射过程中取消了磁控环，采用双轴旋转方法，保证了大面积YBCO双面薄膜的面内均匀性。该项技术采用incocel加热丝绕制成圆筒型辐射加热器，保证加热温度均匀稳定。经使用验证其效果良好，为我国高温超导微波技术的实用化奠定了基础。

·甬　江·