第 31 卷 第 4 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.31 No.4
2002 年 8 月 Journal of UEST of China Aug. 2002

均值绝对偏差资产组合选择模型的算法*

张忠桢**1　　唐小我2

(1. 武汉理工大学管理学院　武汉　430070;　2. 电子科技大学管理学院　成都　610054)

【摘要】对均值绝对偏差模型进行了简化，并利用一种旋转算法求解。这种算法比单纯形算法的计算简便，且计算量更小。利用上海和深圳股市1 072支股票70期周末收盘价所作的实验结果表明，对于资产无上界限制的模型，计算20个不同最优投资组合需要1 274次旋转运算，上界为10%时需要1 570次旋转运算，每次旋转运算约需1 141×71次加法和乘法运算。

关　键　词　资产组合选择;　绝对偏差;　线性规划;　旋转算法;　参数化方法

中图分类号　O221.1

A Computing Method for Solving Mean-absolute Deviation Portfolio Selection Model

Zhang Zhongzhen[1]　Tang Xiaowo[2]

(1. School of Management, WUT of China　Wuhan　430070;　2. College of Management, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　In this paper, the model is reduced and solved by a pivoting-based algorithm proposed by the authors. This algorithm is simpler than the widely used simplex method and requires less amounts of computaion. The experimental results by using 70 weekly data of 1 072 stocks from Shanghai and Shenzhen stock markets of China indicate that 1 274 pivoting operations are required to obtain 20 different optimal portfolios if no upper bound restrictions for every stocks and 1 570 pivoting operations are required if the ratio of each stock is no more than 10%, in which one pivoting operation required about 1 141×71 anddditions and multiplications.

Key words　portfolio selection;　absolute deviation;　linear programming;　pivoting algorithm;　parametric method

文献[1]提出了均值绝对偏差资产组合选择模型，该模型以资产组合收益率的绝对偏差即一阶中心矩作为风险的度量，称为$L1$风险。模型可转化为一个线性规划求解，而马科维兹的均值方差模型是一个凸二次规划，许多学者认为线性规划比凸二次规划容易求解。但从本文实验结果看，情况正好相反。如果引入整数变量，均值绝对偏差模型则比均值方差模型容易求解，所以本文利用一种旋转算法解Konno和Yamazaki的均值绝对偏差模型，这有助于研究更加复杂的资产组合选择模型的计算方法，如具有整数约束和非线性交易成本的模型。由于这种算法无须添加非负变量将一般不等式化为等式，计算用表格较小，其计算量大约是单纯形算法的三分之二。本文还介绍一种参数化方法，连续计算资产组合的预期收益率取不同数值时相应的最优解，以便得到$L1$风险下的有效前沿。为了检验这一方法的效率，运用上海和深圳股市1 072支股票70期周末收盘价作实验。计算程序用Delphi

2002年2月26日收稿
* 国家自然科学基金资助项目，编号：79970004
** 男　56岁　硕士　教授

编写，微机的CPU为AMD-K6-2/300，从全部1 072支股票计算出20个不同投资组合仅需20 s。

1 均值绝对偏差资产组合选择模型

设n种资产的收益率为$R_1,R_2,\cdots,R_n$(随机变量)，投资比例为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，资产组合的$L1$风险定义为

$$f(x)=E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n}R_i x_i)\right|\right]$$

用r_p表示资产组合的预期收益率，均值绝对偏差资产组合选择模型为

$$\begin{aligned}
\min \quad & f(x)=E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}R_i x_i - E(\sum_{i=1}^{n}R_i x_i)\right|\right] \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n}E(R_i)x_i = r_p \\
& \sum_{i=1}^{n}x_i = 1 \\
& 0\leq x_i\leq u_i \qquad i=1,2,\cdots,n
\end{aligned} \tag{1}$$

第一个约束中的等号也可换为不等号“≥”，两者均可用来求出每一有效资产组合。

如果n种资产的收益率$(R_1,R_2,\cdots,R_n)$服从多维正态分布[1]，则以上模型与马科维兹的均值方差模型是等价的，因为资产组合收益率的绝对偏差等于其均方差乘以$\sqrt{2/\pi}$。但利用实际数据(如连续几十期股票收益率)所作的大量实验显示，许多经济变量并不服从正态分布，所以两种模型的计算结果有一定差异。

设R_i的T期观测值为$r_{i1},r_{i2},\cdots,r_{iT}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则$E(R_i)$的估计值为$r_i=\sum_{t=1}^{T}r_{it}\Big/T$，$f(x)$的估计值为$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{n}(r_{it}-r_i)x_i\right|$。令$a_{it}=r_{it}-r_i$, $i=1,2,\cdots,n$，$t=1,2,\cdots,T$，则式(1)成为以下模型

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{it}x_i\right|\Big/T \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{n}r_i x_i = rp \\
& \sum_{i=1}^{n}x_i = 1 \\
& 0\leq x_i\leq u_i \qquad i=1,2,\cdots,n
\end{aligned} \tag{2}$$

令

$$y_t=\left|\sum_{i=1}^{n}a_{it}x_i\right| \qquad t=1,2,\cdots,T$$

则

$$-y_t\leq \sum_{i=1}^{n}a_{it}x_i \leq y_t$$

再引入非负变量$2v_t$和$2w_t$得

$$y_t+\sum_{i=1}^{n}a_{it}x_i-2v_t=0$$

$$y_t-\sum_{i=1}^{n}a_{it}x_i-2w_t=0$$

以上两式相加除以2得$y_t=v_t+w_t$，两式相减除以2得$\sum_{i=1}^{n} a_{it}x_i -v_t+w_t=0$。所以式(2)可化为以下线性规划

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \sum_{t=1}^{T}(v_t + w_t)\\
&\text{s.t.} \quad v_t - w_t - \sum_{i=1}^{n} a_{it}x_i = 0 \qquad t=1,2,\cdots,T\\
&\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r_p\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad 0\le x_i \le u_i, \quad i=1,2,\cdots,n\\
&v_t \ge 0,\ w_t \ge 0 \qquad t=1,2,\cdots,T
\end{aligned} \tag{3}
$$

此模型有$T+2$个一般约束[2]，用单纯形算法求解时，若$u_i=+\infty(i=1,2,\cdots,n)$，则每一最优解至多有$T+2$个正分量，即每一资产组合至多有$T+2$种资产；若$u_i(i=1,2,\cdots,n)$有限，则每一资产组合至多有$T+2$种资产不等于它们的上下界。

2　均值绝对偏差资产组合选择模型的旋转算法

本节讨论用文献[3]的投影算法(称为旋转算法)解模型(3)。由以上模型的第一个约束有$v_t = w_t + \sum_{i=1}^{n} a_{it}x_i$，将其代入目标函数，考虑到离差之和$\sum_{t=1}^{T} a_{it} = 0$，得$2\sum_{t=1}^{T} w_t$，所以式(3)可写为

$$
\begin{aligned}
&\min \quad \sum_{t=1}^{T} w_t\\
&\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_{it}x_i + w_t \ge 0 \qquad t=1,2,\cdots,T\\
&\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\\
&\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = r_p \qquad 0\le x_i \le u_i,\ i=1,2,\cdots,n\\
&w_t \ge 0 \qquad t=1,2,\cdots,T
\end{aligned} \tag{4}
$$

此模型共有$n+T$个变量，比模型(3)少T个变量。下面将目标的系数向量记为$\boldsymbol{c}$，它是前n个分量为0后T个分量为1的$n+T$维行向量。第t个约束的系数向量为$\boldsymbol{a}_t = (a_{1t}, a_{2t}, \cdots, a_{nt}, 0, \cdots, 1, \cdots, 0)$，其中1在第$n+t$个位置，$t=1,2,\cdots,T$。两个等式约束的系数向量分别记为$\boldsymbol{e}$和$\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{e}$是前$n$个分量为1后$T$个分量为0的$n+T$维行向量，$\boldsymbol{r}$是前$n$个分量为$r_1, r_2, \cdots, r_n$后$T$个分量为0的行向量。$x_i\ge 0$的系数向量记为$\boldsymbol{e}_i$，它是$n+T$阶单位矩阵的第$i$行，$i=1,2,\cdots,n$。$w_t\ge 0$的系数向量$\boldsymbol{e}_t$是$n+T$阶单位矩阵的第$t$行，$t=n+1,2,\cdots,n+T$。$x_i \le u_i$或$-x_i\ge -u_i$的系数向量为$-\boldsymbol{e}_i$，$i=1,2,\cdots,n$。

线性规划的计算步骤如下：

步骤1　初始步骤。以$x_1\ge 0,\cdots, x_n\ge 0$，$w_1\ge 0,\cdots,w_T\ge 0$为初始基本不等式组，初始基本解(即基锥顶点)为$n+T$维零向量，初始表见表1。

步骤2　预处理。设r_1和r_2分别是r_1，r_2，…，r_n的最小值和最大值，进行以下两次旋转运算：以e入基e_1出基，然后以r入基e_2出基。

步骤3　主要迭代。在保持c行与基不等式对应的所有元素非负的前提下，进行非基不等式与基不等式系数向量的交换直至所有非基向量偏差非负或发现无可行解[3]。

表1 初始旋转算法表

	e_1	e_2	$\cdots$	e_n	e_{n+1}	e_{n+1}	$\cdots$	e_{n+T}	
c	0	0	$\cdots$	0	1	1	$\cdots$	1	
a_1	a_{11}	a_{21}	$\cdots$	a_{n1}	1	0	$\cdots$	0	0
a_2	a_{12}	a_{22}	$\cdots$	a_{n2}	0	1	$\cdots$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_T	a_{1T}	a_{2T}	$\cdots$	a_{nT}	0	0	$\cdots$	1	0
e	1	1	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0	-1
r	r_1	r_2	$\cdots$	r_n	0	0	$\cdots$	0	$-r_p$

有多种方法选择非基向量入基，在本文的计算程序中，以具有最小负偏差的非基入基，称为最小偏差规则。应该注意的是，e_i和$-e_i(1\leq i\leq n)$在任何一张表中至多占一行。由于e_i和$-e_i$与线性相关，不可能都是基向量。设当前基本解为$x'=(x_1',\cdots,x_{n+T}')^T$，则$e_i$和$-e_i$的偏差为$e_ix'-0=x_i'$和$-e_ix'+u_i=u_i-x_i'$，两者的和为$u_i$。若$e_i$和$-e_i$有一个是基向量，则另一个的偏差$u_i\geq 0$，因而可以不考虑；若两者都是非基向量，由于它们符号相反，在表中可共用一行，所以每张表的大小均为$(T+3)\times(n+T+1)$。事实上，e入基后，其所在列可删掉；若仅计算一个最优解，r入基后，其所在列也可删掉。可以看出，利用这一方法求得的每一资产组合也是至多有$T+2$种资产不等于其上下界。

下面说明模型(4)中的预期收益率r_p在什么范围内变化时，问题有可行解。显然，前T个约束可以不考虑，因为$w_t's$可取很大数值使得这些不等式均得以满足。

若变量$x_i's$无上界要求，容易看出r_p在$r_1,r_2\cdots,r_n$的最小值与最大值之间时，问题有可行解。若变量上界$u_i's$在0与1之间，则应有$u_1+u_2+\cdots+u_n\geq 1$。设$r_1\leq r_2\leq\cdots\leq r_n$。将1依次分配给$x_1,x_2,\cdots,x_n$使其尽可能达到上界，如$x_1=u_1$，$x_2=u_2,\cdots,x_{k-1}=u_{k-1}$，$x_k=v$，其中$u_1+u_2+\cdots+u_{k-1}+v=1$，则$r_p$的最小值为$r_1u_1+r_2u_2+\cdots+r_{k-1}u_{k-1}+r_kv$。同样，将1依次分配给$x_n,x_{n-1},\cdots,x_1$，可求出$r_p$的最大值。

为了求出模型(4)的“所有”最优解，将r_p可取的最小值和最大值构成的区间分为$L-1$等份(一般取$L=20$)，得到r_p的L个数值，使r_p由小到大逐一计算最优解。对某个r_p的值得到最优表后，若r_p的改变量为D，只需将基向量r相应的列乘以D加到最后一列(偏差列)，然后继续求解，这种连续计算最优解的方法称为参数化方法[4]。

本文利用上海和深圳股市2000年4月28日至2001年9月28日之间1 072支股票70期周末收盘价作计算机实验，表2、3是前n支股票的实验结果，n=200,400,600,800,1 000,1 072。对于每一问题，均利用参数化方法计算出20个投资组合。实验结果表明，此模型需要的旋转运算次数比马科维兹的均值方差模型大很多。为了减少累积误差，每进行100次旋转运算便将表中的所有数值作一次校正，即由初始旋转算法表计算出当前表。在当前表中，若$a_1, a_2,\cdots,a_T, e, r$中有$k$个是基变量，由初始表计算出当前表需作$k$次旋转运算。表2和表3括号内的数字是每一问题为校正数值而进行的旋转运算的总次数。每次旋转运算大约需要$(T+3)\times(n+T+1)$次乘法和加法，这里$T=70-1=69$。计算程序用Delphi4.0编写，使用单精度运算，有效数字为六至七位。微机的CPU为AMD-K6-2/300，内存96 Mbyte，是一种档次较低的微机。

表2 由模型(4)计算20个投资组合的实验结果($u_i=+\infty$)

n	200	400	600	800	1 000	1 072
旋转运算次数	685	1 024	1 043	1 125	1 241	1 274
	(238)	(435)	(490)	(568)	(638)	(635)
计算时间/s	2.14	5.71	8.90	13.79	16.26	17.69

对于投资基金，每支股票占资产净值的比例不允许超过10%，所以给出变量上界等于0.1的实验结果如表3所示。

表3　由模型(4)计算20个投资组合的实验结果(u_i=0.1)

n	200	400	600	800	1 000	1 072
旋转运算次数	896	1 272	1 644	1 580	1 616	1 570
	(275)	(447)	(584)	(606)	(655)	(594)
计算时间/s	2.58	6.43	12.36	16.42	19.67	20.15

本文实验用数据由北部资产有限公司(大连)王允松先生提供，在此表示感谢。

参 考 文 献

1　Konno H, Yamazaki H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management Science, 1991, 37(5): 519-531

2　Feinstein C D, Thapa M N. Notes: a reformulation of a mean-absolute deviation portfolio optimization model. Management Science, 1993, 39(12): 1 552-1 553

3　张忠桢, 唐小我. 线性规划的一种以枢轴运算为基础的新算法. 电子科技大学学报, 1996, (25)3: 316-320

4　张忠桢. 马科维兹资产组合选择模型的一种快速算法. 中国学术期刊文摘(科技快报), 2001, (7)5: 656-659

5　张忠桢. 具有上界的马科维兹资产组合选择模型的一种简便算法. 中国学术期刊文摘(科技快报), 2001, (7)9: 1 198-1 200

·科研成果介绍·

半导体陶瓷电容器材料研究

主研人员：钟朝位　张树人　周晓华　朱文奕　郭曙光　蔡雪梅　游文南　范义源　陈忠道　杜广山

半导体陶瓷电容器材料立足于国产化工原材料，通过对材料组成、工艺性能的系统研究，突破了瓷料配方优化、晶界和表面绝缘热处理工艺等关键技术，成功实现了BaTiO3基表面层和SrTiO3基晶界层半导体陶瓷电容器材料的制备。优化的瓷料配方经扩量试生产性能稳定。该课题设计制定的氨分解混合气体还原气氛高温半导化烧结专利方法，解决了半导体陶瓷电容器制备过程中的瓷片半导化关键技术，为该技术成果向生产转化提供了良好的技术条件。小批量制作的晶界层半导体陶瓷电容器经众多单位测试使用，显示出很好的应用前景。表面层半导体陶瓷电容器已实现批量生产，取得明显的经济效益。该项目的氨分解工艺在半导体陶瓷电容器瓷片半导化中的应用属重要创新。

军用目标激光散射特性数据采集与理论建模

主研人员：何　毅　杨春平　吴　健　彭仁军　彭建平　陈长庚

该课题完成了军用目标表面材料的散射分布实验测试和理论分析，已进行实际应用；进行了海面激光散射的理论分析，并在实验室内进行了模拟试验，在此基础上，制作了海面激光散射模型软件，取得一次试验成功的结果，并在其软件中又考虑了太阳光散射的干扰情况，使软件更趋于实用化。开发了一套激光散射计算软件，其理论建模利用“阴影函数”的新概念，使计算结果与实验结果符合得很好。

·科　卞·