# 完全分配格上的极小族拓扑

伊良忠*

(四川工业学院计算机科学与工程系　成都　610039)

【摘要】采用极小族理论建立了完全分配格上的另外一种拓扑——极小族拓扑，使得最大标准极小族是该拓扑仅有的非平凡开集。给出了极小族拓扑的一些性质及该拓扑下函数连续的必要条件，讨论了该拓扑下映射的连续性和广义序同态的关系，证明了完全分配格上的标准极小族映射为广义序同态。

**关　键　词**　完全分配格；　极小族；　最大标准极小族；　极小族拓扑；　广义序同态

**中图分类号**　O153.1

# Minimal Families Topology on Completely Distributive Lattices

Yi Liangzhong

(Department of Computer Science and Engineering , Sichuan Institute of Industry　Chengdu　610039)

**Abstract**　In this paper, a new topological space as well as minimal families topological space is established on completely distributive lattices by using the results of the minimal families, the result that the largest standard minimal families are only nontrivial open sets on this topology is proved .The properties and the sufficient and necessary condition for functional continuity on the minimal families topological space shall be given, the relation between the continuity and the generalized order homomorphism under the new topological space is discussed, the result that the standard minimal families mapping on completely distributive lattices is the generalized order homomorphism is obtained.

**Key words**　completely distributive lattices;　minimal families;　the largest standard minimal families;　minimal families topology

## 1　基本概念

文献[1~3]研究了连续格理论点式拓扑及$L$-Fuzzy拓扑，得到了许多很好的结果。文献[4]研究了极小族、极大族的性质，刻画了完全分配格的构造，在此基础上引入了分子格、Fuzzy格的概念；文献[5]给出了广义序同态的概念及其性质；文献[6]定义了完备格上的属于关系，得到了属于关系与极小族之间关系，给出了完全分配格的一个描述定理。本文在进一步研究极小族性质的基础上，建立了格上的另一种拓扑——极小族拓扑，给出了该拓扑的一些性质及该拓扑下映射的连续性与广义序同态的关系。

总假定$L$是完全分配格，$P$是$L$上的全体并既约元的集合[1]，给出如下基本定义和结论。

定义1[3,4]　设$L$是完备格，$x\in L$，$A\subset L$且$A\neq f$，称$A$是$x$的极小族，如果1) $\sup A=x$；2) 当$C\subset L$且$\sup C\geq x$时，$\forall a\in A,\ \exists b\in C$，使得$a\leq b$。

2002年4月17日收稿

* 男　38岁　硕士　副教授

据文献[4]知，如果 $a\in L$ 有极小族，则$a$有最大极小族并记为 $b(a)$。

定义2[3,4]　设$L$是完备格，$a\in L$，$A\subset L$ 是 $a$ 的极小族，如果 $A\subset P$，则称$A$是 $a$ 的标准极小族。

若 $a$ 有标准极小族，则有最大标准极小族并记为 $b^*(a)$。由后面的定理得知在完全分配格上，$\forall a\in L$，$b^*(a)=b(a)\cap P$。

定义3[1]　设$L$是完备格，$x$，$y\in L$，称$x$远小于$y$，如果对$L$的每一个适合$y\le \sup D$的定向子集$D$，存在 $d\in D$，使得$x\le d$，$x$远小于$y$用$x<<y$表示。

$\forall x\in L$，记　$\Downarrow x=\{y\mid y<<x, y\in L\}$　　$\Uparrow x=\{y\mid x<<y, y\in L\}$　　$\downarrow x=\{y\mid y\le x，y\in L\}$

从而对 $x\in L$ 的每一极小族$A(x)$均有 $A(x)\subseteq\downarrow x$，于是 $b(x)\subset\downarrow x$。

定义4[1]　对完备格$L$，如果 $\forall x\in L$ 有

$$x=\sup\Downarrow x$$

则称$L$为连续格。

根据文献[1]得出以下两个结论：

1) 对完备格$L$，$x=\sup\Downarrow x\Leftrightarrow y\ge x,\ \ \exists u\in L, u<<x$，而$u\le y$；

2) 完全分配格是连续格。

定义5[7]　拓扑空间$(X，t)$称为Baire空间，如果$X$的可数个稠密开集的交是$X$的稠密子集；$A\subseteq X$ 称为一纲集，如果$A$是$X$的可数个无处稠密子集的并；称$(X，t)$为$T_0$的，如果 $x, y\in X, x\ne y$，$\overline{\{x\}}\ne\overline{\{y\}}$。

## 2　完全分配格上的极族拓扑

本节建立了完全分配格上的另外一种拓扑，使得最大标准极小族是该拓扑仅有的非平凡开集，并给出了这种拓扑的一些性质及在该拓扑下映射的连续性与广义序同态的关系。

定理1　设$L$是完全分配格，则 $\forall x\in L, \Downarrow x\cap P$ 是$x$的最大标准极小族。

证明　因$L$是完全分配格，故 $\Downarrow x\cap P\ne f$。

1) $x=\sup(\Downarrow x\cap P)$

由定义4的2)得知，$\forall x\in L, x=\sup\Downarrow x$，故$x\ge\sup(\Downarrow x\cap P)$。

证明　$x\le\sup(\Downarrow x\cap P)$。记 $\sup(\Downarrow x\cap P)=y$，如果$x\le y$，由定义1和定义4得知，存在 $u\in L$，$u<<x$ 而$u\le y$。由 $u<<x$，有 $\downarrow u\cap P\subset\Downarrow x\cap P$，又由文献[1]的定理3.15知 $u=\sup(\downarrow u\cap P)$，于是 $\sup(\downarrow u\cap P)=u\le\sup(\Downarrow x\cap P)=y$，矛盾，从而 $x=\sup(\Downarrow x\cap P)$。

2) $\forall C\subset L$，如果$x\le\sup C$，则$\forall y\in\Downarrow x\cap P$ 有 $y<<x\le\sup C$，由文献[1]得知可构造一定向集$F_C$，使得 $\sup C=\sup F_C$，所以 $y<<x\le\sup C=\sup F_C$。由定义1和定义3，存在 $f\in F_C$ 使得$y\le f$，但 $f=\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n}\{c_i\mid c_i\in C\}$，故　$y\le f=\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{n}\{c_i\mid c_i\in C\}$，由 $y\in P$，有$y\le C_i\ (c_i\in C)$，由此得到：$\Downarrow x\cap P$ 是$x$的极小族。

根据定义1及定义2，可证明结论：$\Downarrow x\cap P$ 是$x$的最大标准极小族且 $\forall a\in L$，$b(a)\cap P=b^*(a)\cap P=\Downarrow a\cap P$。

定理2　设$L$是完全分配格，则 $L^*=\{\Downarrow x\cap P\mid x\in L\}$关于集合的包含关系构成完备格。

证明　显然$(L^*\subset)$构成偏序集。对 $\forall A^*\subset L^*$，令 $A^*=\{b^*(a_i)\mid i\in I\}$，而$A=\{a_i\mid i\in I\}$，由文献[4]有

$$b(\vee A)=b(\mathop{\vee}\limits_{i\in I}a_i)=\mathop{\cup}\limits_{i\in I}b(a_i)$$

所以

$$b(\vee A)\cap P=b(\mathop{\vee}\limits_{i\in I}a_i)\cap P=(\mathop{\cup}\limits_{i\in I}b(a_i))\cap P$$

即

$$b(\underset{i\in I}{\vee} a_i)\cap P=\underset{i\in I}{\cup}[b(a_i)\cap P]$$

故

$$\underset{i\in I}{\cup} b^*(a_i)\in L^*$$

由文献[1]得知$(L^*\subset)$是完备格。

注 根据定理2，可以证明并可参见文献[6]。

1) $(L^*\subset)$构成完全分配格且与$(L\leq)$同构；

2) $b^*(\underset{i\in I}{\wedge} a_i)=\underset{i\in I}{\cap} b^*(a_i)$， $\{a_i\,|\,i\in I\}\subset L$。

若记$t^*=L^*\cup\{L,f\}$，则有：

定理3 设$L$是完全分配格，则$t^*$是$L$上的拓扑，即$(L,t^*)$构成拓扑空间。

定义6 称$t^*$是$L$上的极族拓扑(或极小族拓扑)，$(L,t^*)$为极族拓扑空间(极小族拓扑空间)。

类似以上讨论，可以定义极大族拓扑及极大族拓扑空间。

定理4 设$(L,t^*)$是极族拓扑空间，则有：

1) $S=\{\Downarrow x\cap P\,|\,x\in L\}\cup\{L\}$是$t^*$的基；如果$P$是可数集，则$(L,t^*)$是第二可数空间；

2) $\forall U\in t^*, U\neq f$，则$U$是稠密子集，即$\overline{U}=L$ ；

3) $\forall A\subset L$，则$A\in t^*\Leftrightarrow \overline{A}=L$ ；

4) $(L,t^*)$是Baire空间；

5) $(L,t^*)$是连通空间；

6) $A\subset L$是一纲集$\Leftrightarrow A^{\circ}=f$。

证明见1)～4)，并结合文献[5]中有关内容；

5) 因为$(L,t^*)$中，既开又闭的子集只有$L$及$f$，故$(L,t^*)$是连通的；

6) 必要性见文献[7]定理6.17。下面讨论充分性, 因$A^{\circ}=f$，从而$A$是闭集(因$f=A^{\circ}=L-\overline{(L-A)}$)，故$\overline{L-A}=L$,即$A=\overline{A}$，这样，$L-A=L-\overline{A}\in t^*$即$L-\overline{A}$稠密，从而$A$是无处稠密子集。

## 3 连续性与广义序同态

本节研究极族拓扑下的连续映射，给出了连续映射与广义序同态的关系。

定义7[3~5] 设$L_1$与$L_2$是完全分配格，$f:L_1\to L_2$是映射，$f$称为广义序同态，或简称GOH，若

1) $f(0)=0$；

2) $f$是保并映射；

3) $f^{-1}$是保并映射，这里$\forall b\in L_2$， $f^{-1}(b)=\vee\{a\in L_1|\, f(a)\leq b\}$。

定义8 设$(L_1,t_1^*)$与$(L_2,t_2^*)$是极族拓扑空间，$f:L_1\to L_2$是GOH，如果$f$连续，则称$f$是(该拓扑)连续的广义序同态。

以下总假定$P_1$与$P_2$分别是$L_1$与$L_2$的全体并既约元的集合，所述拓扑都是极族拓扑。

根据定理2及定义7，得：

定理5 对完全分配格$L$，标准极小族映射$b^*:L\to L^*(a\to\Downarrow a\cap P)$是GOH。

定理6 设$f$：$L_1$, → $L_2$ 是满射，如果$f$关于极族拓扑连续，则$f$是开映射。

证明 因$f$连续，那么由文献[5]，$\forall A\subset L$，有$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$，这样，对$\forall U\in t_1^*$，有

$$f(\overline{U})=f(L_1)\subset\overline{f(U)}\subset L_2$$

故

$$\overline{f(U)}=L_2$$

由定理4中的3)得知$f(U)\in t_2^*$，故$f$是开映射。

结合文献[7]定理1.12及本节定理6得：

推论 设$f:L_1\to L_2$是满单射，则如果$f$连续，那么$f$是$(L_1,t_1^*)$与$(L_2,t_2^*)$间的同胚映射。

**定理**7　**对映射** $f:(L_1,t_1^*)\to(L_2,t_2^*)$ **，若** $f^{-1}$ **保并，则**$f$**连续的充分必要条件是** $\forall b\in L_2$，$f^{-1}(\Downarrow b\cap P_2)=\Downarrow f^{-1}(b)\cap P_1$。

**证明　充分性是显然的。**

**必要性，**$\forall U\in t_2^*$**，令**$U=\Downarrow b\cap P_2$**，**$b\in L_2$**，而**$f$ **关于极族拓扑连续，故有** $f^{-1}(\Downarrow b\cap P_2)\in t_1^*$**，设** $f^{-1}(\Downarrow b\cap P_2)=\Downarrow a\cap P_1$**，** $a\in L_1$**，下面证明：**$a=f^{-1}(b)$。

**由** $f^{-1}(\Downarrow b\cap P_2)=\Downarrow a\cap P_1$ **得：** $\sup f^{-1}(\Downarrow b\cap P_2)=\sup(\Downarrow a\cap P_1)$ **，利用** $f^{-1}$ **的保并性有** $a=f^{-1}(b)$**，从而结论成立。**

**定理**8　**设** $f:L_1\to L_2$ **是保并映射，则** $f:(L_1,t_1^*)\to(L_2,t_2^*)$ **是开映射** $\Leftrightarrow\forall a\in L_1$，　$f(\Downarrow a\cap P_1)=\Downarrow f(a)\cap P_2$。

**证明　充分性显然，下证必要性：**

**设** $f$ **是开映射，则**$\forall a\in L_1$，　$f(\Downarrow a\cap P_1)\in t_2^*$**，但** $f$ **是保并映射，这样**

$$\sup f(\Downarrow a\cap P_1)=f[\sup(\Downarrow a\cap P_1)]=f(a)$$

**从而由**$t_2^*$**的构造有**

$$f(\Downarrow a\cap P_1)=\Downarrow f(a)\cap P_2$$

**结合本节定理**5～**定理**8**得：**

**定理**9　**设** $f:(L_1,t_1^*)\to(L_2,t_2^*)$ **是满**GOH**，则下列命题等价：**

1) $f$ **连续；**

2) $\forall b\in L_2$，　$f^{-1}(\Downarrow b\cap P_2)=\Downarrow f^{-1}(b)\cap P_1$**；**

3) $f$**是开映射；**

4) $\forall a\in L_1$，　$f(\Downarrow a\cap P_1)=\Downarrow f(a)\cap P_2$。

**注　定理**9**进一步完善了文献**[3]**的定理**3**与定理**4。

**根据定理**2**及定义**7**，可以证明：**

**定理**10　**设 有映射** $f:L_1\to L_2$ **及** $f^*:L_1^*\to L_2^*$，**其中** $f^*(\Downarrow a\cap P_1)=\Downarrow f(a)\cap P_2$，**则** $f$ **是**GOH$\Leftrightarrow f^*$ **是**GOH。

**定理**11　**设** $f:L_1\to L_2$ **开映射，则** $f(P_1)\subset P_2$**，即把**$L_1$**的并既约元映成**$L_2$**的并既约元，且**$f(0)=0$。

**证明**　$\forall z\in P_1$**，由文献**[1]**知** $\Uparrow z\neq f$**，故必有** $y\in L_1$**，使得** $z\in\Downarrow y\cap P_1$**，但**$f$**是开映射，故** $f(z)\in\Downarrow f(y)\cap P_2$，**即** $f(z)\in P_2$**，所以** $f(P_1)\subset P_2$。**又由** $f(0)=f(\Downarrow 0\cap P_1)=\Downarrow f(0)\cap P_2$**，从而** $f(0)=0$**，证毕。**

## 参　考　文　献


1　Gierz G. A compendium of continuous lattices. Springer—Verlag 1980

2　舒　兰. $L$-Fuzzy拓扑共生结构的有界性. 电子科技大学学报, 1991, 20 (5): 537-541

3　王国俊. 完全分配格上的点式拓扑(1). 陕西师范大学学报(自), 1985, (1): 1-17

4　王国俊. 论Fuzzy格之构造. 数学学报, 1986, 29(4): 529-543

5　王国俊. 广义序同态理论及其应用. 东北数学, 1985, (2): 141-152

6　刘旺金, 伊良忠. 完备格上属于关系与极小族. 四川师范大学学报, 1992, 1(15): 46-50

7　BENJAMINT. SIMS. Fundamentals of topology. Macmillan Publishing Co., Inc. 1976