第31卷 第5期 电子科技大学学报 Vol.31 No.5
2002年10月 Journal of UEST of China Oct. 2002

一类神经网络模型的解及其渐近性态

徐 军* 张春凤 钟守铭
(电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】 通过对简单一维微分方程的求解，得出了一类人工神经网络模型的解解析表达式。它是由对称阵的特征值与特征向量表达。根据此解析表达式推出了该神经网络模型在特殊情况下的解析表达式。在特殊情况下，特征值与特征向量的神经网络计算已有很多论文论及。最后利用解析表达式分析了该神经网络解的渐近稳定性态。

关 键 词 神经网络; 对称矩阵; 特征值; 特征向量; 一致渐近稳定

中图分类号 TP18; O175.13

Solutions and Asymptotically Stable Behavior of a Neural Network Model

Xu Jun Zhang Chunfeng Zhong Shouming
(College of Applied Mathmatics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, the differential equation of an artificial neural network model is solved by solving a simple one dimension differential equation.The solutions of the neural network that is obtained are represented by the eigenvalues and eigenvectors of the symmetric matrix.Then the other solutions in special conditions are obtained using the solutions in general conditions.In special condtions,the neural network is employed to compute out all eigenvalues and eigenvectors by many dissertations.Finally,the asymptotic stable behavior is analyzed using the solutions.

Key words neural; network;symmetric; matrix; eigenvalue; eigenvector; consistent asymptotic stable

考虑微分方程

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}X(t) - X^{T}(t)\boldsymbol{B}X(t)X(t) \tag{1}$$

式中 $X \in R^n$，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 分别视为神经网络的两个不同的连接权强度，式中 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 一般矩阵。$X \in R^n$ 为神经网络的状态。研究的问题是微分方程式(1)的解及解的渐近性态。文献[1]根据式(1)中当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时得出了它的解并分析了该解的渐近性态，并用神经网络方法计算出了全部特征值与特征向量。文献[2,3]根据式(1)的模型当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时给出了非线性电路模拟方法，并运用在特征向量的神经网络计算。

实际神经网络模型出现 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 联接权强度不一样情况下文献[1~3]中很多好的结论将不再成立。为了使这类神经网络有更加广泛与普遍的适用意义，本文将得出微分方程式(1)在 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$ 时的解析表达式并分析其解的渐近性态。因为当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 时同样可得到文献[1]的全部结论，因此本文在此推广了文献[1]的结果。

2002年4月26日收稿
* 男 29岁 硕士生

1　解的解析表达式

对于系统式(1)**若取** $X(0)=0$**，显然在** $t=0$ **时过** $X(0)=0$ **的解为** $X(t)\equiv 0$**，于是可知方程**(1)**的解的表达式为** $X(t)\equiv 0$**。若** $X(0)\in R^n$ **且** $X(0)\neq 0$**，并设** $l_1, l_2, \cdots, l_n$ **是特征值，** $S_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ **是** $\boldsymbol{A}$ **对于** $l_i(i=1,2,\cdots,n)$ **的特征向量组成的** R^n **中的一组标准正交基，于是** $X(0)$ **在下** $S_1, S_2, \cdots, S_n$ **的分解为**

$$X(0)=\sum_{i=1}^{n} z_i(0)S_i \tag{2}$$

由于 $X(0)\neq 0$**,至少存在** $r\in\{1,2,\cdots,n\}$**，使得** $z_r(0)\neq 0$**，从而有**

定理 1　**设** $l_1, l_2, \cdots, l_n$ **是** $\boldsymbol{A}$ **的特征值，对应的标准正交向量为** $S_1, S_2, \cdots, S_n$**，对任意** $X(0)\in R^n$ **且** $X(0)\neq 0$**，则存在** $z_r(0)\neq 0$**，其中** $z_r(0)$ **满足式**(2)**，则** $t=0$ **时方程组式**(1)**过** $X(0)$ **的解为**

$$X(t)=\frac{1}{\sqrt{1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_k(0)z_j(0)b_{kj}f_{kj}(t)}}\sum_{i=1}^{n} z_i(0)\mathrm{e}^{l_i t}s_i \qquad t\in[0,t_{\max})$$

其中　$b_{kj}=S_K^T B S_j$

$$f_{kj}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{l_k+l_j}\left[\mathrm{e}^{(l_k+l_j)t}-1\right] & l_k+l_j\neq 0\\[2ex] t & l_k+l_j=0\end{cases}$$

证明　**对任意** $t\in[0,t_{\max})$**,设** $X(t)$ **为式**(1)**过** $X(0)$ **的解.根据正交分解原理，令** $X(t)=\sum_{i=1}^{n} z_i(t)S_i$ **并代入式**(2)**得**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_i(t)S_i]=l_i z_i(t)S_i-\left[\sum_{k=1}^{n} z_k(t)S_k\right]^T B\left[\sum_{j=1}^{n} z_j(t)S_j\right]z_i(t)S_i=$$

$$l_i z_i(t)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}z_k(t)z_j(t)z_i(t) \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

由 $z_r(0)\neq 0$ **得**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_r(t)]=l_r z_r(t)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}z_k(t)z_j(t)z_r(t)=\left[\ l_r-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}z_k(t)z_j(t)\ \right]z_r(t) \tag{4}$$

由式(4)**解得**

$$z_r(t)=z_r(0)\mathrm{e}^{\int_0^t\left[l_r-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}z_k(t)z_j(t)\right]\mathrm{d}t} \tag{5}$$

不失一般性，设 $z_r(0)>0$**,于是对一切** $t\in[0,t_{\max})$ **有** $z_r(0)>0$**，由于**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{z_i(t)}{z_r(t)}\right]=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_i(t)]z_r(t)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[z_r(t)]z_i(t)}{z_r^2(t)}=\frac{(l_i-l_r)z_i(t)z_r(t)}{z_r^2(t)}=(l_i-l_r)\frac{z_i(t)}{z_r(t)} \tag{6}$$

解式(6)**得**

$$\frac{z_i(t)}{z_r(t)}=\frac{z_i(0)}{z_r(0)}\mathrm{e}^{\int_0^t(l_i-l_r)dt}=\frac{z_i(0)}{z_r(0)}\mathrm{e}^{(l_i-l_r)t} \tag{7}$$

下面先求解$z_r(t)$在式(4)两边同乘以$-\dfrac{2}{z_r^3(t)}$可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{z_r^2(t)}\right]=-2l_r\left[\frac{1}{z_r^2(t)}\right]+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}z_k(t)z_j(t)\frac{1}{z_r^2(t)}=$$

$$-2l_r\left[\frac{1}{z_r^2(t)}\right]+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}\frac{z_k(t)}{z_r(t)}\frac{z_j(t)}{z_r(t)} \tag{8}$$

式(7)中分别令$i=k, i=j$并代入式(8)得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{z_r^2(t)}\right]=-2l_r\left[\frac{1}{z_r^2(t)}\right]+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}\frac{z_k(0)z_j(0)}{z_r^2(0)}\mathrm{e}^{(l_k+l_j-2l_r)t} \tag{9}$$

解式(9)得

$$\frac{1}{z_r^2(t)}=\frac{1}{z_r^2(0)}\mathrm{e}^{-2l_rt}+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}\frac{z_k(0)z_j(0)}{z_r^2(0)}\left[\int_0^t\mathrm{e}^{-2l_r(t-s)}\times\mathrm{e}^{(l_k+l_j-2l_r)s}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{1}{z_r^2(0)}\mathrm{e}^{-2l_rt}+2\mathrm{e}^{-2l_rt}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}\frac{z_k(0)z_j(0)}{z_r^2(0)}\left[\int_0^t\mathrm{e}^{(l_k+l_j)s}\mathrm{d}s\right]=$$

$$\frac{1}{z_r^2(0)}\mathrm{e}^{-2l_rt}+2\mathrm{e}^{-2l_rt}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}\frac{z_k(0)z_j(0)}{z_r^2(0)}f_{kj}(t)$$

于是有

$$z_r(t)=\frac{z_r(0)\mathrm{e}^{l_rt}}{\sqrt{1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}z_k(0)z_j(0)f_{kj}(t)}}$$

又由式(7)得

$$z_i(t)=\frac{z_i(0)}{z_r(0)}\mathrm{e}^{(l_i-l_r)t}z_r(t)=\frac{z_i(0)\mathrm{e}^{l_it}}{\sqrt{1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}z_k(0)z_j(0)f_{kj}(t)}}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

即

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}z_i(t)S_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}z_i(0)\mathrm{e}^{l_it}S_i}{\sqrt{1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{kj}z_k(0)z_j(0)f_{kj}(t)}}\qquad t\in[0,t_{\max})$$

证毕

推论 设神经网络系统式(1)中$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，$l_1, l_2,\cdots,l_n$**是$\boldsymbol{A}$的特征值，**$S_i(i=1,2,\cdots,n)$**是$\boldsymbol{A}$的对应**$l_i(i=1,2,\cdots,n)$**的特征向量组成的**$R^n$**中的一组标准正交基，对任意**$X(0)\in R^n$，**若**$X(0)$**在**$S_i(i=1,2,\cdots,n)$**下的分解为**

$$X(0)=\sum_{i=1}^{n} z_i(0)S_i$$

则式(1)过 $X(0)$ 的解为

$$X(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n} z_j^2(0)\left(\mathrm{e}^{2l_j t}-1\right)}}\sum_{i=1}^{n} z_i(0)\mathrm{e}^{l_i t}s_i \qquad t\in[0,t_{\max})$$

其中

$$t_{\max}=\inf\left\{t\,|\,t\geq 0, 1+\sum_{j=1}^{n} z_j^2(0)\left(\mathrm{e}^{2l_j t}-1\right)=0\right\}$$

证明　因为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，所以有

$$b_{kj}=S_k^T AS_j=S_k^T l_j S_j=l_j S_k^T S_j=\begin{cases} l_j & j=k \\ 0 & j\neq k\end{cases}$$

于是有

$$X(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\sum_{j=1}^{n} z_j^2(0)\left(\mathrm{e}^{2l_j t}-1\right)}}\sum_{i=1}^{n} z_i(0)\mathrm{e}^{l_i t}s_i \qquad t\in[0,t_{\max})$$

本推论就是文献[1]的主要定理，同样可获得文献[1]中其他结论，也可得到文献[2,3]的很多成果。这表明本文推广了文献[1]的结论。

2　解的渐近性态

定理 2　若 A 的特征值均为负，则神经网络系统式(1)的零解是一致渐近稳定的。

证明　因为 A 的特征值均为负，所以 $l_j+l_k\neq 0\ (k,j=1,2,\cdots,n)$ 于是由定理1可知，系统式(1)的解为

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n} z_i(t)S_i=\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i(0)\mathrm{e}^{l_i t}s_i}{\sqrt{1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{kj}}{l_j+l_k}z_k(0)z_j(0)\left[\mathrm{e}^{(l_k+l_j)t}-1\right]}} \tag{10}$$

另一方面，对任意 $t\geq 0$，有 $\mathrm{e}^{(l_k+l_j)t}\leq 1$，从而有

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{kj}}{l_k+l_j}z_k(0)z_j(0)\left[\mathrm{e}^{(l_j+l_k)t}-1\right]\geq 1-2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{|b_{kj}|}{|l_k+l_j|}|z_k(0)||z_j(0)|\left[1-\mathrm{e}^{(l_k+l_j)t}\right] \tag{11}$$

令 $l=\min_{1\leq i\leq n}\{|l_i|\}$ $L=\max_{1\leq k,j\leq n}\{|b_{kj}|\}$，由条件知，$l_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，于是由式(11)有

$$1+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{kj}}{l_j+l_k}z_k(0)z_j(0)\left[\mathrm{e}^{(l_k+l_j)t}-1\right]\geq 1-2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|b_{kj}|}{|l_k+l_j|}|z_k(0)||z_j(0)|\left[1-\mathrm{e}^{(l_k+l_j)t}\right]\geq$$

$$1-\frac{L}{l}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|z_k(0)||z_j(0)|=1-\frac{nL}{l}\sum_{k=1}^{n}z_k^2(0)=1-\frac{nL}{l}\|x(0)\|^2$$

若取 $\|x(0)\|<\sqrt{\frac{l}{nL}}$ 时，可知解式(10)对任意 $t\geq 0$ 时均有意义。

首先，证明神经网络模型式(1)的解是一致稳定的。对任意 $t_0\geq 0$ 以及任意 $e>0$，根据定理1的证明可知，任取 $X(0)\in R^n$ 有

$$X(t_0)=\sum_{i=1}^{n} z_i(t_0)S_i\,,$$

可解得

$$X(t)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i(\mathrm{t}_0)\mathrm{e}^{l_i(t-t_0)}S_i}{\sqrt{1+2\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{b_{kj}}{l_k+l_j}z_k(t_0)z_j(t_0)\left[\mathrm{e}^{(l_k+lj)(t-t_0)}-1\right]}} \tag{12}$$

于是

$$\|x\| \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i(t)|}{\sqrt{1-\dfrac{nL}{l}\|\mathrm{x}(t_0)\|^2}} \le \frac{\sqrt{n}\|x(t_0)\|}{\sqrt{1-\dfrac{nL}{l}\|x(t_0)\|^2}}$$

取

$$d=\min\left\{\frac{e}{2\sqrt{n}},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3l}{nL}}\right\}$$

其中d与t_0无关，于是有

$$\|x(t)\|<\frac{e}{2\sqrt{1-\dfrac{nL}{l}\dfrac{3}{4}\dfrac{l}{nL}}}=e$$

故系统式(1)**的零解是一致稳定的。**

再证$X=0$是一致吸引的，根据式(12)**易知**

$$\|x(t)\|\le\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i(t_0)|\mathrm{e}^{l_i(t-t_0)}\|S_i\|}{\sqrt{1-\dfrac{nL}{l}\|X(t_0)\|^2}}$$

所以$X=0$是一致吸引的，故证得神经网络模型(1)**的零解是一致渐近稳定的。** **证毕**

参 考 文 献

1 章 毅, 王平安, 周明天. 用神经网络计算矩阵特征值与特征向量. 计算机学报, 2001, 23(1): 71-76

2 罗龙发, 李衍达, 王 哲. 一类正定矩阵特征矢量的神经网络求解. 中国科学, 1994, 24(1): 83-84

3 罗龙发, 李衍达. 求解正定矩阵最小和最大特征值对应的特征矢量. 电子学报, 1994, 22(4): 13-19

4 Oja E, Karthunen J. On stochastic approximation of eigenvectors and eignvalues of the expectation of a random matrix . J Math Anal. 1985, 106: 69-84

5 Fury Christ J, Edward W. Optimization Using Neural Network. IEEE Trans. on Computer, 1991, 40(12): 1347-1358