第 31 卷 第 5 期 电子科技大学学报 Vol.31 No.5
2002 年 10 月 Journal of UEST of China Oct. 2002

迭代法迭代阵谱半径新上界*

高中喜**1　　黄廷祝1　　王广彬2

(1. 电子科技大学应用数学学院 成都 610054；2. 上海大学数学系 上海 200436)

【摘要】 引用双严格对角占优的概念，针对线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 在求数值解时常用的迭代方法，给出了 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法迭代阵谱半径的新上界，该新上界优于严格对角占优矩阵条件下得到的已有的结果,是已有结果在更广泛矩阵类条件下的推广，对相应迭代法迭代阵谱半径的估计更加精确。最后给出了数值例子说明所给结果的优越性。

关 键 词 线性方程组; 双对角占优; 迭代法; 谱半径

中图分类号 O241.6; O151.2

A New Upper Bound for the Spectral Radius of Iterative Matrices

Gao Zhongxi1　　Huang Tingzhu1　　Wang Guangbin2

(1.College of Appl. Math., UEST of China Chengdu 610054; 2. Dept. of Math., Shanghai University Shanghai 200436)

stract Jacobi and Gauss-Seidel iterations for solving large linear system $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ are studied. Based on the concept of the doubly diagonal dominance, new upper bound for the spectral radius of Jacobi and Gauss-Seidel iterations are presented. Results obtained improve the known corresponding results and are suited to extended matrices. Finally, two numerical examples are given for illustrating advantage results in this paper.

Key words linear system; diagonal strictly dominance; iteration; spectral radius

大型方程组求解的迭代法之重要问题是研究相应迭代法迭代阵谱半径的估计，它对于研究迭代法收敛性以及收敛速度等是非常有意义的。文献[1~3]对于严格对角占优矩阵的情形进行了研究，但严格对角占优矩阵由于条件较强，往往不便于应用。下面引入双严格对角占优矩阵的概念，得到关于 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法迭代阵谱半径上界新的好的估计。

1 注 记

设 $\boldsymbol{R}^{n,n}$ 为 n 阶实矩阵的全体，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n,n}$，记

$$N=\{1,2,\cdots,n\},\quad R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{i\neq j}|a_{ij}|,\quad \|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\quad \forall i,j\in N。$$

定义 1[1] 若 $|a_{ii}a_{jj}|>R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A})$，$\forall i,\ j\in N,\ i\neq j$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为双严格对角占优矩阵，记 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{C}$。在求解线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\qquad \boldsymbol{A}\text{ 非奇}$$

2002年6月4日收稿
* 四川省跨世纪杰出青年科技学术带头人基金资助项目，编号：JSA1081
** 男 27岁 硕士生

求解过程中，常将 A 分裂为 $A = D - L - U$，其中 $D = \mathrm{diag}\ (a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$，$L$ 是矩阵 A 的严格下三角矩阵，U 是矩阵 A 的严格上三角矩阵。

下面给出两种重要的迭代法[2, 3]：

1) Jacobi 迭代法

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{f}$$

其中 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$，$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$。

2) Gauss-Seidel 迭代法

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{x}^{k} + \boldsymbol{g}$$

其中 $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$，$\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{b}$。

引理 1[4]　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{n,n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的每一特征值均落在下述 $\binom{n}{2}$ 个 Cassini 卵形域 O_{ij} 并集之中

$$O_{ij}:\ |l - a_{ii}||l - a_{jj}| \le R_i(\boldsymbol{A})\,R_j(\boldsymbol{A}) \qquad \forall i, j \in N \text{ 且 } i \ne j。$$

引理 2[1, 5]　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}$ 非奇。

定理 1[2, 4]　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{R}^{n,n}$，则 $r(\boldsymbol{A}) \le \|\boldsymbol{A}\|_\infty$。

2　Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法迭代阵谱半径上界的估计

定理 2　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}$，则 Jacobi 迭代法迭代阵谱半径 $r(\boldsymbol{B})$ 的上界

$$r(\boldsymbol{B}) \le \max_{i \ne j}\ \left(R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big/|a_{ii}a_{jj}|\right)^{\frac{1}{2}} \qquad i, j \in N$$

证明　因为 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}$，所以 $a_{ii} \ne 0$。设 l 为 $\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 的任意特征值，则

$$\det(l\,\boldsymbol{I} - \boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})) = 0$$

即

$$\det(l\,\boldsymbol{D} - (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})) = 0$$

故使 $l\,\boldsymbol{D} - (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) \in \boldsymbol{C}$ 的 l 均不是 $\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 的特征值，即当

$$l^2|a_{ii}a_{jj}| > R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$$

l 一定不是 $\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 的特征值，所以若 l 为 $\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$ 的特征值时，由引理1可知，至少有一对 $i, j\ (i \ne j)$，使得

$$l^2|a_{ii}a_{jj}| \le R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$$

即

$$|l| \le \left(R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big/|a_{ii}a_{jj}|\right)^{\frac{1}{2}}$$

所以

$$r(\boldsymbol{B}) \le \max_{i \ne j}\left(R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\,R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})\big/|a_{ii}a_{jj}|\right)^{\frac{1}{2}}$$

定理 3　设 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}$，则 Gauss-Seidel 迭代法迭代阵谱半径 $r(\boldsymbol{M})$ 的上界

$$r(\boldsymbol{M}) \le \max_{i \ne j}\left(P_2 + \sqrt{P_2^2 - 4P_1P_3}\right)\big/2P_1 \qquad i, j \in N$$

式中　$P_1 = |a_{ii}a_{jj}| - R_i(\boldsymbol{L})\,R_j(\boldsymbol{L})$，$P_2 = R_i(\boldsymbol{L})\,\boldsymbol{R_j}(\boldsymbol{U}) + R_j(\boldsymbol{L})\,R_i(\boldsymbol{U})$，$P_3 = -R_i(\boldsymbol{U})\,R_j(\boldsymbol{U})$。

证明　因为 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{C}$，所以 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}) \in \boldsymbol{C}$，由引理2知 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}$ 非奇，设 l 为 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的任一特征值，

则

$$\det(l\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U})=0$$

即

$$\det(l(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U})=0$$

故使 $l\,(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})-\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{C}$ 的 l 均不是 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的特征值，即当

$$|la_{ii}||la_{jj}|>\sum_{t\neq i}|ll_{it}-u_{it}|\sum_{l\neq j}|ll_{jl}-u_{jl}| \qquad i\neq j \tag{1}$$

时，此 l 一定不是 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的特征值。特别当

$$l^2|a_{ii}a_{jj}|>(\sum_{t\neq i}|l||l_{it}|+|u_{it}|)(\sum_{l\neq j}|l||l_{jl}|+|u_{jl}|) \qquad i\neq j \tag{2}$$

时， l 不为 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的特征值，所以当 l 为 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{U}$ 的特征值时，根据引理1知，至少有一对 i，$j(i\neq j)$ 使得

$$l^2|a_{ii}a_{jj}|\leq(\sum_{t\neq i}|l||l_{it}|+|u_{it}|)(\sum_{l\neq j}|l||l_{jl}|+|u_{jl}|) \tag{3}$$

即

$$(|a_{ii}a_{jj}|-R_i(\boldsymbol{L})R_j(\boldsymbol{L}))|l|^2-(R_i(\boldsymbol{L})R_j(\boldsymbol{U})+R_j(\boldsymbol{L})R_i(\boldsymbol{U}))|l|-R_i(\boldsymbol{U})R_j(\boldsymbol{U})\leq 0 \tag{4}$$

由于 $(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L})\in\boldsymbol{C}$ ，故 $|a_{ii}||a_{jj}|-R_i(\boldsymbol{L})R_j(\boldsymbol{L})>0$ ，且判别式 $\Delta\geq 0$，所以式(4)的解满足

$$(P_2-\sqrt{P_2^2-4P_1P_3})/2P_1\leq|l|\leq(P_2-\sqrt{P_2^2-4P_1P_3})/2P_1$$

且

$$(|a_{ii}a_{jj}|+R_i(\boldsymbol{L})R_j(\boldsymbol{L}))|l|^2+(R_i(\boldsymbol{L})R_i(\boldsymbol{U})+R_j(\boldsymbol{L})R_i(\boldsymbol{U}))|l|+R_i(\boldsymbol{U})R_j(\boldsymbol{U})\geq 0 \tag{5}$$

由于 $|a_{ii}a_{jj}|+R_i(\boldsymbol{L})R_j(\boldsymbol{L})>0$ ，且判别式 $\Delta\leq 0$，所以式(5)的解为 $|l|\in R$。联合式(4)和式(5)的解，得到不等式式(3)的解满足

$$(P_2-\sqrt{P_2^2-4P_1P_3})/2P_1\leq|l|\leq(P_2-\sqrt{P_2^2-4P_1P_3})/2P_1$$

故

$$r(\boldsymbol{M})\leq(P_2+\sqrt{P_2^2-4P_1P_3})/2P_1\leq\max_{i\neq j}(P_2+\sqrt{P_2^2-4P_1P_3}/2P_1 \qquad \forall i,\ j\in N \quad i\neq j$$

式中 $P_1=|a_{ii}a_{jj}|-R_i(\boldsymbol{L})R_j(\boldsymbol{L})$，$P_2=R_i(\boldsymbol{L})\boldsymbol{R_j}(\boldsymbol{U})+R_j(\boldsymbol{L})R_i(\boldsymbol{U})$，$P_3=-R_i(\boldsymbol{U})R_j(\boldsymbol{U})$。

文献[2,3]的结果仅对于严格对角占优矩阵适用，这里所得结果是就双严格对角占优矩阵给出的，显然，严格对角占优矩阵是双严格对角占优矩阵的特例。

3 数值例子

例1 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7&2&6\\0&8&1\\1&1&9\end{bmatrix}$$

由定理2知

$$
\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix}
$$

$r(\boldsymbol{B})\le 0.504\,0$，而由定理1知，$r(\boldsymbol{B})\le 1.142\,9>1$。所以由定理2知迭代法收敛，而此时定理1无法判断迭代法的收敛性。

例2　设 $\boldsymbol{A}$ 同例1，则

$$
\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0 & -0.285\,7 & -0.857\,1 \\ 0 & 0 & -0.125\,0 \\ 0 & 0.031\,7 & 0.109\,1 \end{bmatrix}
$$

由定理3知，$r(\boldsymbol{M})\le 0.378\,0$，而由定理1知 $r(\boldsymbol{M})\le 1.142\,8>1$，所以由定理3知迭代法收敛，而此时定理1无法判断迭代法的收敛性。例1和例2中的矩阵显然不是严格对角占优矩阵，所以，文献[2 ,3]的结果在这里不能应用。

4　结 束 语

以双严格对角占优矩阵取代严格对角占优矩阵得到了更好的新的上界估计，使得 Jacobi 和 Gauss－Seidel 迭代法迭代阵谱半径的估计更加快捷、精确。同理可以将该条件应用于其他更加复杂的迭代法迭代阵谱半径的估计，以得到更好的结果。

参 考 文 献

1　Li B，Tsatsomeros M J. Doubly diagonally dominant matrices. Lin. Alg. Appl., 1997, 261: 221-23

2　James K R. Convergence of matrix iterations subject to diagonal dominance. SIAM J. Num. Anal., 1973，12: 478-484

3　Hu J G. Upper bounds of the spectral radius of some iterative matrices. Journal Comp. Math., 1990，8(2): 118-127

4　Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis. Cambridge University Press，Cambridge，1990

5　Berman A, Plemmon P. Nonnegative matrices in the mathematical sciences. SIAM Press, Piladephia, 1994

6　黄廷祝. 块 Jacobi 迭代阵的收敛性. 电子科技大学学报, 1996, 25(6): 663-665