第 31 卷 第 6 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.31 No.6
2002 年 12 月 Journal of UEST of China Dec. 2002

线性不等式组的一种新算法*

张忠桢**1 唐小我2

(1. 武汉理工大学管理学院 武汉 430070; 2. 电子科技大学管理学院 成都 610054)

【摘要】介绍线性不等式组的一种以旋转运算为基础的直接解法。由于这种方法无须添加任何变量，计算用表非常紧凑。不仅使每次迭代的计算量较小，而且可以方便地从理论上分析问题，证明了此算法在每次迭代中按最小下标规则选择入出向量可以避免循环。计算机实验表明，该算法可以非常有效地求解马科维兹的资产组合选择模型。

关 键 词 旋转运算; 基; 基本不等式组; 基本解

中图分类号 O151.21

New Algorithm for System of Linear Inequalities

Zhang Zhongzhen[1] Tang Xiaowo[2]

(1. School of Management, WUT of China Wuhan 430070; 2. College Management, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract A pivoting-based algorithm for the system of linear inequalities is proposed. Since it solves the system directly without adding any variables, a compact form is used for operations. It not only requires less computation for each iteration but also makes easy the theoretical analysis for the characteristics of the solved problem. It is proved that this method terminates as long as the entering and leaving variables are selected by the smallest-subscript rule in each iteration. This proof is essentially that proposed by G.B. Bland, but varies greatly in the form. The experiment shows that this method is very efficient for solving Markowitz's portfolio selection model (convex quadratic programming).

Key words pivoting operation; basis; basic system of inequalities; basic solution

自单纯形算法提出以来，人们通常将线性不等式组转化为线性规划求解。线性规划的目标函数起着导向作用，使基本解相应的目标值非增或非减，需要的旋转次数可能较少，但目标函数限制了基本解的活动范围。直接解线性不等式组则可使基本解在更大的范围内转移，从而迭代次数较少。用单纯算法解线性规划往往要添加松弛或剩余变量将一般不等式化为等式，如果有自由变量，每个自由变量须用两个非负变量代替，以便化为标准型。得到标准型后，一般还要添加人工变量才能启动单纯形法程序，使问题规模变大，不仅增加了计算量而且难以进行理论分析。本文介绍线性不等式组的一种直接解法，无须添加任何变量，因而每次旋转运算的计算量较小。此算法的基本运算形式与文献[1]介绍的解线性规划的投影算法类似。计算机实验表明，利用这种算法可以非常有效地解马科维兹的资产组合选择模型(凸二次规划)，并可从文献[2~4]中看到这种算法的优点。

2002年2月26日收稿
* 国家自然科学基金资助项目，编号：79970004

** 男 56岁 硕士 教授

1　基本概念及有关定理

考虑线性不等式组

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} = b_i & i = 1,2,\cdots,e \\ \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \geq b_i & i = e+1,\cdots,m \end{cases} \tag{1}$$

式中　x是n维未知列向量；$\boldsymbol{a}_i$是n维行向量；b_i是标量，i=1,2,⋯,m。本文介绍的解法称为旋转算法，用到以下一些基本概念：$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_m$中一个最大线性无关组称为不等式组(1)的基，基中的量称为基向量，其余向量称为非基向量。基向量相应的(不)等式称为基(不)等式，否则称为非基(不)等式。由基等式和基不等式构成的不等式组称为基本不等式组，而基本不等式组相应的方程组的解称为基本解。

旋转算法以Farkas引理为基础[5, 6]，下面的定理仅将其中的变量x换为$-x$。

定理 1　设$\boldsymbol{a}_i$和$\boldsymbol{c}$是n维行向量, $\boldsymbol{x}$是n维未知列向量，y_i是未知标量，则以下两个不等式组有一个且仅有一个有解

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \geq 0 \qquad i=1,2,\cdots,l; \quad \boldsymbol{cx} < 0$$

$$y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_l \boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{c} \qquad y_1,y_2,\cdots,y_l \geq 0$$

推论 1　设$\boldsymbol{a}_i$和$\boldsymbol{a}_r$是n维行向量, x是n维未知列向量，b_i和y_i(未知)是标量。设$\bar{x}$是方程组$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}=b_i$, i=1,2,⋯, l的一个解，则以下两个不等式组有一个且仅有一个有解。

不等式组1：$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} = b_i$, i=1,2,⋯,e；$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \geq b_i$, i= e+1,⋯,l；$\boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}_r \bar{x}$。

不等式组2：$y_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + y_l \boldsymbol{a}_l = \boldsymbol{a}_r$；$y_{e+1},\cdots,y_l \geq 0$。

或不等式组

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} = b_i \qquad i=1,2,\cdots,e$$

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{x} \geq b_i \qquad i= e+1,\cdots,l$$

的所有解满足$\boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{a}_r \bar{x}$的充分必要条件是不等式组2有解。

证明　只需将不等式组1化为以下形式

$$\boldsymbol{a}_i (\boldsymbol{x} - \bar{x}) \geq 0$$

$$-\boldsymbol{a}_i (\boldsymbol{x} - \bar{x}) \geq 0 \qquad i = 1,2,\cdots,e$$

$$\boldsymbol{a}_i (\boldsymbol{x} - \bar{x}) \geq 0 \qquad i= e+1,\cdots,l$$

$$\boldsymbol{a}_r (\boldsymbol{x} - \bar{x}) < 0$$

定理 2　给定不等式组(1)的一个基，用$I0$、$I1$、$I2$、$I3$分别表示基等式、基不等式、非基不等式、非基等式的编号集。设x^1是基本解，即$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{x}^1=b_j$，$j\in I0\cup I1$。再设对于某个$r\in I2$，则有$\boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x}^1 < b_r$，并且

$$a_r = \sum_{j\in I0\cup I1} w_{rj} a_j \tag{2}$$

1) 如果对于任何$j\in I1$有$w_{rj} \leq 0$, 则不等式组(1)无解；

2) 如果存在某个$s\in I1$使得$w_{rs}>0$，则$\boldsymbol{a}_s \boldsymbol{x}^2 > b_s$，其中$x^2$是方程组$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{x}=b_j$，$j\in\{r\}\cup I0\cup I1\backslash\{s\}$的解；

3) 如果仅有一个$s\in I1$使得$w_{rs}>0$, 但是对于任何$j\in I1\backslash\{s\}$有$w_{rj}\leq 0$，则$\boldsymbol{a}_s \boldsymbol{x} \geq b_s$是不等式组(1)的一个冗余不等式。

证明　1) 由于$-\boldsymbol{a}_r = -\sum_{j\in I0\cup I1} w_{rj} a_j$，其中$-w_{rj}\geq 0$，$j\in I1$。根据推论1, 不等式组

$$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{x} = b_j \qquad j\in I0$$

$$\boldsymbol{a}_j \boldsymbol{x} \geq b_j \qquad j\in I1$$

的任何解满足$-\boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x} \geq -\boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x}^1$，即满足$\boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x}^1 < b_r$而不满足$\boldsymbol{a}_r \boldsymbol{x} \geq b_r$, 因此不等式组(1)没有解。

2) 由式(2)解出a_s得

$$a_s = (1/w_{rs})a_r + \sum_{j\in I0\cup I1\setminus\{s\}} (-w_{rj}/w_{rs})a_j \tag{3}$$

两边右乘x^2得

$$a_s x^2 = (1/w_{rs})a_r x^2 + \sum_{j\in I0\cup I1\setminus\{s\}} (-w_{rj}/w_{rs})a_j x^2 =$$

$$(1/w_{rs})b_r + \sum_{j\in I0\cup I1\setminus\{s\}} (-w_{rj}/w_{rs})b_j =$$

$$(1/w_{rs})(b_r - \sum_{j\in I0\cup I1} w_{rj}b_j) + b_s =$$

$$(1/w_{rs})\ (b_r - \boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}^1) + b_s > b_s$$

3) 由于在式(3)中$1/w_{rs}>0$，并且对于任何$j\in I1\setminus\{s\}$有$-w_{rj}/w_{rs}\geq 0$，根据推论1，不等式组

$$\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{x} = b_j \qquad j\in I0$$

$$\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{x}\geq b_j \qquad j\in\{r\}\cup I0\setminus\{s\}$$

的所有解满足$\boldsymbol{a}_s\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{a}_s\boldsymbol{x}^2$，因而满足$\boldsymbol{a}_s\boldsymbol{x}>b_s$，故$\boldsymbol{a}_s\boldsymbol{x}\geq b_s$是不等式组(1)的一个冗余不等式。

推论 2 给定不等式组(1)的一个基，用$I0$、$I1$、$I2$、$I3$分别表示基等式、基不等式、非基不等式、非基等式的编号集。设x^1是基本解，并且对于某个$r\in I3$有

$$a_r = \sum_{j\in I0\cup I1} w_{rj}a_j$$

1) 如果$\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}^1<b_r$，并且对于任何$j\in I1$有$w_{rj}\leq 0$；或者$\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}^1>b_r$，并且对于任何$j\in I1$有$w_{rj}\geq 0$，则不等式组(1)无解；

2) 如果$\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}^1\leq b_r$，并且存在某个$s\in I1$使得$w_{rs}>0$；或者$\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}^1\geq b_r$，并且存在某个$s\in I1$使得$w_{rs}<0$，则$\boldsymbol{a}_s\boldsymbol{x}^2\geq b_s$，其中$x^2$是方程组$\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{x} = b_j$，$j\in\{r\}\cup I0\cup I1\setminus\{s\}$的解；

3) 如果$\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}^1 = b_r$，并且对于任何$j\in I1$有$w_{rj}=0$，则$a_r x=b_r$是不等式组(1)的一个冗余等式。

证明 只需注意$\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x} = b_r$，相当$\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}\geq b_r$和$-\boldsymbol{a}_r\boldsymbol{x}\geq -b_r$两个不等式。

2 线性不等式组解法中的旋转运算及计算步骤

下面推导不等式组解法中的旋转运算公式。给定不等式组(1)的一个基，用$I0$、$I1$、$I2$、$I3$分别表示基等式、基不等式、非基不等式、非基等式的编号集。设x^1是基本解，即$a_j x^1=b_j$, $j\in I0\cup I1$，并设

$$a_i = \sum_{j\in I0\cup I1} w_{ij}a_j \qquad i\in I3\cup I2 \tag{4}$$

如果对于某个$r\in I3\cup I2$和$s\in I1$有$w_{rs}\neq 0$，则从式(4)可解得

$$a_s = (1/w_{rs})a_r + \sum_{j\in I0\cup I1\setminus\{s\}} (-w_{rj}/w_{rs})a_j \tag{5}$$

$$a_i = (1/w_{is})a_r + \sum_{j\in I0\cup I1\setminus\{s\}} [w_{ij} - (w_{is}/w_{rs})w_{rj}]a_j \qquad i\in I3\cup I2\setminus\{r\} \tag{6}$$

$\{r\}\cup I0\cup I1\setminus\{s\}$是新基的编号集，相应的基本解记为$\boldsymbol{x}^2$。在式(6)两边右乘$\boldsymbol{x}^2$得

$$a_i x^2 = (w_{is}/w_{rs})a_r x^2 + \sum_{j\in I0\cup I1\setminus\{s\}} [w_{ij} - (w_{is}/w_{rs})w_{rj}]a_j x^2 =$$

$$(w_{is}/w_{rs})b_r + \sum_{j\in I0\cup I1} [w_{ij} - (w_{is}/w_{rs})w_{rj}]b_j$$

在式(4)两边右乘x^1得

$$a_i x^1 = \sum_{j\in I0\cup I1} w_{ij}b_j$$

以上两式相减得

$$a_i x^2 - a_i x^1 = (w_{is} / w_{rs}) b_r - \sum_{j \in I0 \cup I1} (w_{is} / w_{rs}) w_{rj} b_j =$$
$$(w_{is} / w_{rs})(b_r - \sum_{j \in I0 \cup I1} w_{rj} a_i x^1) =$$
$$(w_{is}/w_{rs})(b_r - \boldsymbol{a_r} \boldsymbol{x^1})$$

将上式改写为$\boldsymbol{a_i} \boldsymbol{x}^2 - b_i = \boldsymbol{a_i} \boldsymbol{x}^1 - b_i - (w_{is}/w_{rs})(\boldsymbol{a_r} \boldsymbol{x}^1 - b_r)$，令$s_i = \boldsymbol{a_i} \boldsymbol{x}^1 - b_i$，$s_r = \boldsymbol{a_r} x^1 - b_r$，$s_i' = \boldsymbol{a_i} x^2 - b_i$得

$$s_i' = s_i - (w_{is}/w_{rs})\ s_r \qquad i \in I3 \cup I2 \backslash \{r\}$$

同样由式(5)可得$\boldsymbol{a_s} x^2 - b_s = -(1/w_{rs})(a_r x^2 - b_r)$，或

$$s_s' = -s_r/w_{rs}$$

其中$s_s' = \boldsymbol{a_s} \boldsymbol{x}^2 - b_s$。以上运算过程称为旋转运算，$w_{rs}$称为枢轴(元素)，其所在行称为枢轴行，所在列称为枢轴列。$\boldsymbol{a_r}$入基，即$\boldsymbol{a_s}$出基，两者位置的交换记为$\boldsymbol{a_r} \leftrightarrow \boldsymbol{a_s}$，旋转运算前后的数据如表1、2所示。其中，$w_{ij}' = w_{ij} - (w_{is}/w_{rs}) w_{rj}$，$i \in I3 \cup I2 \backslash \{r\}, j \in I0 \cup I1 \backslash \{s\}$; $s_i' = s_i - (w_{is}/w_{rs})\ s_r$，$i \in I3 \cup I2 \backslash \{r\}$。

表1 初始表

	$\boldsymbol{a_s}$	$\boldsymbol{a_j}$	
$\boldsymbol{a_r}$	w_{rs}	w_{rj}	s_r
$\boldsymbol{a_i}$	w_{is}	w_{ij}	s_i

表2 旋转运算的结果

	$\boldsymbol{a_r}$	$\boldsymbol{a_j}$	
$\boldsymbol{a_s}$	$1/w_{rs}$	$-w_{rj}/w_{rs}$	$-s_r/w_{rs}$
$\boldsymbol{a_i}$	w_{is}/w_{rs}	w_{ij}'	s_i'

表1中，$s_i = a_i x^1 - b_i$称为a_i或相应(不)等式关于x^1的偏差。如果

$$s_i = \boldsymbol{a_i} \boldsymbol{x}^1 - b_i = 0 \qquad i \in I3$$
$$s_i = \boldsymbol{a_i} \boldsymbol{x}^1 - b_i \geq 0 \qquad i \in I2$$

则x^1是不等式组(1)的解。不等式组(1)的计算步骤及要点如下。

算法 1 不等式组(1)的旋转算法。

步骤1 构造初始表 如果不等式组含有形如$x_i \geq l_i$的不等式(l_i是有限实数)，则以$x_i \geq l_i$为初始基本不等式；否则以$x_i \geq -M$初始基本不等式，i=1,2,⋯,n，其中M是一个充分大的数。它们的系数向量(初始基向量)是n阶单位矩阵的n行，其余等式和不等式的系数向量都是非基向量。初始基本解为$x_i = l_i$或$-M$，i=1,2,⋯,n。将其代入每个非基等式和不等式，两边相减即得各非基向量的偏差，从而列出表1所示的初始表。

步骤2 预处理 尽可能把所有非基等式换成基等式，记$I0=\{1,2,\cdots,e\}$。

1) 如果$I0=\varnothing$，转步骤3。否则，对于任一$r \in I0$，当a_r的偏差s_r是负数、正数或0时，分别转2)、3)、4);

2) 若同行没有与基不等式对应的正元素，则不等式组(1)无解，否则以其中一个正元素为枢轴进行一次旋转运算，令$I0:=I0 \backslash \{r\}$，转1)；

3) 若同行没有与基不等式对应的负元素，则不等式组(1)无解, 否则以其中一个负元素为枢轴进行一次旋转运算，令$I0:=I0 \backslash \{r\}$，转1)；

4) 若同行与基不等式对应的元素均为0，则$a_r x = b_r$是不等式组(1)的一个冗余等式，令$I0:=I0 \backslash \{r\}$，转1)；否则以其中一个非零元素为枢轴进行一次旋转运算，令$I0:=I0 \backslash \{r\}$，转1)。

步骤3 主迭代 进行非基不等式与基不等式的交换。

1) 若所有非基向量偏差非负，则当前基本解是不等式组(1)的解，停止；

2) 以其中一个偏差为负的非基向量入基。如果同行没有与基不等式对应的正元素，则不等式组(1)无解，否则以其中一个正元素为枢轴进行一次旋转运算，转1)。

以上计算步骤与文献[1]中线性规划的解法类似。两者的主要区别在于，线性规划的计算表格多

一行(目标函数行)，解不等式组则没有这一行。

设$\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)^T$是基本解。如果$x_i\geq l_i$或$-M$是基不等式，则$x_i^*=l_i$或$-M$；如果是非基不等式，则$x_i^*$等于其偏差加上$l_i$或$-M$。

例1 求以下不等式组的一个解

$$
\begin{aligned}
&-2x_1+x_3=1\\
&-4x_1+x_2+2x_3\geq 3\\
&3x_1+2x_2+x_3\geq 12\\
&x_1\geq 0,\ x_2\geq 2.
\end{aligned}
$$

解 令$\boldsymbol{a}_1=(-2, 0, 1)$, $\boldsymbol{a}_2=(-4, 1, 2)$, $\boldsymbol{a}_3=(3, 2, 1)$, $\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2=(0, 1, 0)$。引入不等式$x_3\geq -M$，并令$\boldsymbol{e}_3=(0, 0, 1)$。

以$x_1\geq 0, x_2\geq 2, x_3\geq -M$为初始基本不等式组，初始基本解为$\boldsymbol{x}^0=(0, 2, -M)^{\mathrm{T}}$，初始基向量为$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$。非基向量为$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，它们的偏差分别为$-M-1$, $2-2M-3=-2M-1$, $2\times 2-M-12=-M-8$，初始表如表3所示。

表3 初始表

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{e}_3$	
$\boldsymbol{a}_1$	-2	0	1^*	$-M-1$
$\boldsymbol{a}_2$	-4	1	2	$-2M-1$
$\boldsymbol{a}_3$	3	2	1	$-M-8$

表4 第一次旋转运算结果

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{e}_2$	
$\boldsymbol{e}_3$	2	0	$M+1$
$\boldsymbol{a}_2$	0	1	1
$\boldsymbol{a}_3$	5	2^*	-7

表5 第二次旋转运算结果

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{a}_3$	
$\boldsymbol{e}_3$	2	0	$M+1$
$\boldsymbol{a}_2$	$-5/2$	1/2	9/2
$\boldsymbol{e}_2$	$-5/2$	1/2	7/2

在表3中，由于非基向量a_1是等式的系数向量，首先应换入基中。由于其偏差是负数，以该行的正元素1（带星号者）为枢轴进行旋转运算，结果见表4，其中基向量a_1所在列已删掉。在表4中，非基向量a_3的偏差是-7，以a_3入基。该行两个元素均为正，不妨以2为枢轴进行旋转运算，结果如表5所示。至此，所有非基向量偏差非负，当前基本解是不等式组的一个解，此基本解为$x_1=0$, $x_2=(7/2)+2=11/2$, $x_3=M+1+(-M)=1$。

例2 在例1的不等式组中，如果还要求$x_2\leq 4$，求一个解。

解 将$x_2\leq 4$写为$-x_2\geq -4$，其系数向量为$-\boldsymbol{e}_2$。此问题的初始表及前二次旋转运算见表3~5。虽然表5列出的所有非基向量偏差是正数，但$-\boldsymbol{e}_2$的偏差为 $4-2-(7/2)=-3/2$，是负数。将表5的$\boldsymbol{e}_2$换为$-\boldsymbol{e}_2$，将7/2换为$-3/2$，并将同行其他元素反号，调整后情况如表6所示。

表6 调整后的表格

	$\boldsymbol{e}_1$	$\boldsymbol{a}_3$	
$\boldsymbol{e}_3$	2	0	$M+1$
$\boldsymbol{a}_2$	$-5/2$	1/2	9/2
$-\boldsymbol{e}_2$	$5/2^*$	$-1/2$	$-3/2$

表7 第三次旋转运算结果

	$-\boldsymbol{e}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	
$\boldsymbol{e}_3$	4/5	2/5	$M+(11/5)$
$\boldsymbol{a}_2$	-1	0	3
$\boldsymbol{e}_1$	2/5	1/5	3/5

以$-\boldsymbol{e}_2$入基以$\boldsymbol{e}_1$出基，旋转运算结果如表7所示。可以看出此时所有非基向量偏差非负，因此得到不等式组的解：$x_1=3/5$, $x_2=4$, $x_3=M+(11/5)-M=11/5$。

3 最小下标反循环规则

与解线性规划的单纯形法类似，有多种方法选择非基向量入基。每种方法都在迭代过程中产生一个基(或基本解)的序列。在此序列中如果前后有两个基相同，则这种情况将重复出现，此现象称为循环。发生循环时，必定有些向量不断地入基和出基，本文将这些向量称为游动向量。下面按本

文的概念证明，利用最小下标(或编号)规则选择入出基向量可以避免循环。这一证明与R.G.Bland的结果本质上一致[6]，但形式大不相同。按照最小下标规则，如果有几个非基向量可以入基(偏差为负数)，就以下标最小者入基，如果有几个基向量可以出基(对应枢轴行的正数)就以下标最小者出基。

定理 3　在解线性不等式组(1)的旋转算法中应用最小下标规则可以防止循环。

证明　用反证法，设将最小下标规则用于(1)出现循环。用s表示游动向量的最大下标，用$B1$和$B2$表示迭代过程中出现的两个基，并设$B1=I0\cup I1$。$B1$相应的基本解记为x^1, $B2$相应的基本解记为x^2。假设对于$B1$，$\boldsymbol{a}_r$入基$\boldsymbol{a}_s$出基，对于$B2$，$\boldsymbol{a}_s$入基，并设$\boldsymbol{a}_r=\sum_{j\in I0\cup I1} w_{rj}a_j$，两边右乘$x^1$，然后右乘以$x^2$得

$$\boldsymbol{a}_r x^1=\sum_{j\in I0\cup I1} w_{ij}a_j x^1=\sum_{j\in I0\cup I1} w_{rj}b_j$$

$$\boldsymbol{a}_r x^2=\sum_{j\in I0} w_{ij}b_j+\sum_{j\in I1} w_{rj}a_j x^2$$

后式减前式得

$$a_r x^2-a_r x^1=\sum_{j\in I1} w_{rj}(a_j x^2-b_j)$$

由于$\boldsymbol{a}_r$是$B1$的入基向量，$\boldsymbol{a}_r x^1<b_r$；$\boldsymbol{a}_s$是$B2$的入基向量，必有$\boldsymbol{a}_r x^2\geq b_r$。因此

$$\sum_{j\in I1} w_{rj}(a_j x^2-b_j)>0$$

上式意味着存在$t\in I1$使得

$$w_{rt}(\boldsymbol{a}_t x^2-b_t)>0 \tag{7}$$

式(7)表示$\boldsymbol{a}_t x^2\neq b_t$，即$t$不属于$B2$。但是$t\in B1$，因此$\boldsymbol{a}_t$是游动向量并且$t\leq s$。

由于$\boldsymbol{a}_r$要进入而$\boldsymbol{a}_s$要离开$B1$，枢轴元素$w_{rs}>0$。由于$\boldsymbol{a}_s$要进入$B2$，$\boldsymbol{a}_s x^2<b_s$。因此

$$w_{rs}(\boldsymbol{a}_s x^2-b_s)<0 \tag{8}$$

式(7)和式(8)表示$t\neq s$，因而$t<s$。$\boldsymbol{a}_s$是$B2$的入基向量，$\boldsymbol{a}_t x^2-b_t\geq 0$。而式(7)进一步说明$\boldsymbol{a}_t x^2-b_t>0$并且$w_{rt}>0$。按照最小下标规则，这时应选$\boldsymbol{a}_t$离开$B1$(因为$w_{rt}>0$)，这与$\boldsymbol{a}_s$是$B1$的出基向量相矛盾。

参 考 文 献

1　张忠桢, 唐小我. 线性规划的一种以枢轴运算为基础的新算法. 电子科技大学学报, 1996, 25(3): 316-320

2　张忠桢. 马科维兹资产组合选择模型的一种快速算法. 中国学术期刊文摘(科技快报), 2001, 7(5): 656-659

3　张忠桢. 具有上界的马科维兹资产组合选择模型的一种简便算法. 中国学术期刊文摘(科技快报), 2001, 7(9): 1 198-1 200

4　张忠桢. 具有凸交易成本的均值方差资产组合选择模型的实用计算方法. 中国学术期刊文摘(科技快报), 2001, 7(12): 1 596-1 597

5　Bazarra M S, Shetty C M. Nonlinear programming: theorem and algorithm. John Wiley & Sons Inc., 1979

6　Chvatal V. Linear programming. W.H. Freeman and Company, 1983