第 32 卷　第 3 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.32　No.3
2003 年 6 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Jun. 2003

重尾分布信源的排队等待时间的分析方法

吴援明*　　梁恩志　　罗　毅

(电子科技大学 宽带光纤传输与通信系统技术国家重点实验室　成都　610054)

【摘要】介绍了一种变换近似方法，该方法通过变换近似获得重尾分布的拉普拉斯变换，解决了不存在拉普拉斯变换分布的信源排队等待时间分析问题，为实际网络排队缓冲器的设计提供了参考。

关　键　词　排队；　重尾分布；　变换近似方法；　拉普拉斯变换

中图分类号　TN915.43　　　　文献标识码　A

Method of Analyzing Queueing Waiting Time of Sources with Heavy-Tailed Distribution

Wu Yuanming　　Liang Enzhi　　Luo Yi

(State Key Laboratory of Broadband Optical Fiber Transmission and Communication Networks, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　In this paper, the transform approximation method is introduced, which gains Laplace transforms of heavy-tailed distributions approximately. It overcomes the difficulties in analyzing queue waiting time of heavy-tailed distribution sources, which haven' t the Laplace transforms. It can be referred in practical design of the buffers of network queue.

Key words　queueing;　heavy-tailed distribution;　transform approximation method;　laplace transform

在传统的电信理论中，业务量到达过程和服务时间的分布主要是基于Morkovian假设。通过研究发现许多分组交换网络中的信息流具有长相关特性(long-range dependence)/自相似(self-similar)[1]。在无限缓冲的假设下，模拟试验及分析发现，系统输入为长相关业务流时，稳态下缓冲器溢出概率分布呈现重尾形态；系统输入为短相关业务流时，稳态下缓冲器溢出概率分布呈现指数形态。

在排队分析时传统方法是用Laplace 变换来处理。由于重尾分布的拉氏变换不存在，给服务时间呈重尾分布的排队分析带来困难，需要采用新方法来分析，本文介绍了一种变换近似的方法[2~4]。

1　重尾分布

一个分布是重尾分布当且仅当[4]

$$\lim_{x\to\infty} G^c(x+y)/G^c(x)=1 \qquad y\geq 0 \qquad G^c(x)=1-G(x)=P(X>x) \tag{1}$$

常用的几种重尾分布分别为：Pareto、Lognormal和Weibull分布。

标准二个参数的Pareto分布其分布函数表示形式为

$$F(x)=1-[1/(a+x)^b] \qquad a,b>0$$

对数正态随机变量的密度函数为 $f(x)=\mathrm{e}^{-(\ln(x)-b)^2/(2a^2)}/x\sqrt{2\pi}a$ ，$(x,a>0)$，均值为 $E(X)=\mathrm{e}^{b+5a^2}$ ，方差

2002年12月20日收稿

* 男　37岁　硕士　副教授　主要从事现代通信中的信号处理技术方面的研究

为$V_{ar}[X]=\mathrm{e}^{2b+a^3}/(\mathrm{e}^{a^2}-1)$。

Weibull密度函数为

$$f(x)=ab^{-a}x^{(a-1)}\mathrm{e}^{-(x/b)^a} \qquad x,a,b>0$$

均值为$E(X)=bG(1/a)a^{-1}$，方差$V_{ar}[X]=b^2\left[2G(2/a)-G(1/a)^2/a\right]a^{-1}$，其中$G(\cdot)$为$G$函数。

2 变换近似方法

密度函数的Laplace变换为

$$F(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-sx}f(x)\mathrm{d}x \qquad \mathrm{Re}\,(s)\geq 0 \tag{2}$$

如果$f(x)$是重尾分布，那么$F(s)$没有闭合形式。文献[2]给出了$F(s)$的近似形式

$$F(s)=\sum_{i=1}^{N}\exp(-sx(i))/N$$

式中 $x(i),i=1,2,\cdots,N$，是原始变量X的N点离散近似，所以$G(x(i))=i/(N+1)$ ($G(x)$表示分布函数)称$x(i)$为变换近似方法(transform approximation method, TAM)的取样。文献[4]中分别给出了$f(x)$是Pareto分布和Weibull分布时$x(i)$的表达式。因为这种方法的取样点是均匀的，所以称之为均匀变换近似方法(U_TAM)。

3 用变换近似方法计算等待时间的递推方法

在文献[5]中$W_q(s)$表示在M/G/1队列中排队等待时间Laplace变换，其中l表示用户的到达率，$r=l\,ES$ (这里ES是服务时间的数学期望)，$B(s)$是服务时间密度函数Laplace变换，$W_q(t)$是队列等待时间的分布函数，那么对于$\mathrm{Re}(s)\geq 0$有

$$w_q(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}w_q(t)\mathrm{d}t=(1-r)s/[s-l(1-B(s))] \tag{3}$$

因为重尾分布Laplace变换不存在，本文采用变换近似取样代换$B(s)$，即$B(s)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{-sx(i)}/N$，在求出$W_q(t)$后还需要计算其反变换，标准算法为Fourier-Series方法。用变换近似方法来分析。

设$T>0$是个小的常数，$z=\mathrm{e}^{-sT}\sim(1-sT)$近似$W_q(s)\equiv w_q(s)/s$，那么式(3)可变换为$R(z)=\sum_{n=0}^{\infty}r_n z^n$，其中$r_n=W_q(nT)$，$T$是$W_q(t)$的取样间隔。

设$x(i)$是变换近似取样，$k(i)$是整数满足：对所有i有$Tk(i)\sim x(i)$，$c(n)$是$k(i)$的数目

$$B(s)=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{-sx(i)}/N\sim\sum_{i=1}^{N}\mathrm{e}^{-sk(i)T}/N=\sum_{i=1}^{N}z^{k(i)}/N=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)z^n/N$$

$$W_q(s)=(1-r)/(1-z-lT(1-\sum_{n=0}^{\infty}c(n)z^n/N))=\sum_{n=0}^{\infty}r_n z^n$$

由此可以得到

$$r_0=(1-r)/(1-lT) \qquad r_n=r_{n-1}/(1-lT)-(lT/(N(1-lT)))\sum_{j=0}^{\infty}c(n-j)r_j \qquad n=1,2,3,\cdots$$

由此递推方程可以得到所有的r_n。但是这种方法的缺点是当N很大时计算$\sum_{j=0}^{n}c(n-j)r_j$速度很慢，所以Shortle等提出了一种geometric TAM的改进算法[4]。

4 仿真结果

U_TAM和G_TAM的仿真结果见文献[6]。M/P/1的数值结果如表1所示[4]，在各种情况下$r=0.8$，CV是服务时间的变化系数，等于标准差除以均值。本文采用的计算机是933 MHz的PC，仿真结果如表2所示。

表1 数字实例

分布	CV=3	CV=5	CV=10
Pareto	l=1.000	l=0.867	l=0.816
	a=2.250	a=2.083	a=2.020
	l=1.000	l=0.867	l=0.816
Weibull	a=0.411	a=0.311	a=0.233
	b=0.260	b=0.117	b=0.026
Lognormal	l=1.000	l=0.867	l=0.816
	a=1.517	a=1.805	a=2.148
	b=4.374	b=1.709	b=2.327

表2 数字实例

分布	$P\{Wq<t\}$	CV=3	CV=5	CV=10
Pareto	0.5	3.33	4.21	4.67
	0.7	9.22	12.34	14.06
	0.9	28.78	42.52	50.93
Weibull	0.5	7.12	17.78	56.03
	0.7	17.98	49.50	176.51
	0.9	44.30	134.30	545.77
Lognormal	0.5	5.02	10.04	26.31
	0.7	14.44	34.89	101.59
	0.9	42.82	120.89	428.98

5 结 论

在传统的排队分析中等待时间是基于负指数服务时间，是用Laplace变换方法来分析，但当服务时间密度函数(如：Pareto分布)的Laplace变换不存在时，分析排队等待时间是很困难的。本文介绍变换近似方法较好地解决了上述问题，其分析简单且在实际中易实现，给网络分析带来了很大方便，特别是对在实际网络中缓冲器设计方面有着重要的意义，因此本文将会继续对此进行更为深入的研究。

参 考 文 献

[1] Leland W, Taqqu M, Willinger W, *et al.* On the self-similar nature of ethernet traffic[J].(extended version) IEEE/ACM Trans on Networking,1994,2(1):1-15

[2] Harris C M, Marchal W G. Distribution estimation using laplace transforms[J]. INFORMS Journal on Computing, 1998, (10):448-458

[3] Harris C M, Brill P H. Internet-type queues with power-tailed interarrival times and computational methods for their analysis[J]. INFORMS Journal on Computing, 2000, (12):261-271

[4] Shore J F, Brill P H. An algorithm to compute the waiting time distribution for the M/G/1 queue[J]. Conditionally accepted and resubmitted to INFORMS Journal on Computing,2002

[5] Gross D, Harris C M. Fundamentals of queueing theory, Second Edition[M], John Wiley: 1985

[6] Gross D, Shortle J F. Using quantile estimates in simulating internet queues with heavy-tailed service times[C]. Fifth World Multi-Conference on Systems, Cybernetics and Informatics: 2001

编 辑 孙晓丹