第32卷 第4期 电子科技大学学报 Vol.32 No.4
2003年8月 Journal of UEST of China Aug. 2003

分块广义对角占优矩阵的条件

高 建* 干泰彬 黄廷祝
(电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】 根据块对角占优和广义块对角占优矩阵的概念，在原有点H矩阵的基础上，应用分块技术，研究给出了分块广义对角占优矩阵的一个简捷实用的充分条件和一个必要条件，推广了相应文献的结果，进一步补充和完善了块对角占优矩阵的理论

关 键 词 对角占优； 分块对角占优；范数；置换矩阵；
中图分类号 0151.26; 0241.6 文献标识码 A

A Sufficient Condition and a Necessary Condition of Generalized Diagonally Dominant Matrices

Gao Jian Gan Taibin Huang Tingzhu
(School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, according to the concepts of block diagonal dominance and generalize diagonal dominance, a new simple criterion for nonsingular block generalize diagonal dominant matrices (i.e. block H-matrices) are obtained by making use of the norm of submatrices of a given matrix only. Advantages are illustrated by numerical examples. And a necessary condition for nonsingular block Hmatrices is also presented. These results generalize the corresponding results in this area, and make a nodest contribution to this area.

Key words diagonal dominance; block diagonal dominance; norm; permutation matrix

记 $M_n(C)$ 为 n 阶复矩阵的集合。设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$ 分块如下：

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中 A_{ii}为r_i阶方阵，$1\leqslant i\leqslant k$，且$\sum_{i=1}^{k} r_i=n$。记$K=\{1,2,3,\cdots,k\}$，$\Lambda_i=\sum_{\substack{j\in K\\ j\neq i}}\|A_{ij}\|$，其中$\|\bullet\|$取与向量范数相容的矩阵范数，

$$K_1=\left\{i\left|0<\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\leqslant \Lambda_i,\ i\in K\right.\right\}\qquad K_2=\left\{i\left|\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}>\Lambda_i,\ i\in K\right.\right\}$$

定义1[1] 设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$形如式(1)分块，且A_{ii}是非奇的($1\leqslant i\leqslant k$)，若$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geqslant \Lambda_i$，$1\leqslant i\leqslant k$，

2003年3月7日收稿

* 女 37岁 讲师 主要从事矩阵代数、数据计算方面的研究

则称A为块对角占优矩阵，记为$A\in G_0$。若上式中的不等号均为严格的，则称A为严格块对角占优矩阵，记为$A\in G$。

定义2[2]　若存在n阶正对角矩阵D，使$B=AD$为严格块对角占优矩阵，则称A为块广义对角占优矩阵，记为$A\in G^*$。

1　主要结果

定理1　设$A=(a_{ij})\in M_n(C)$形如式(1)分块，若$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\sum\limits_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|A_{it}\right\|$，$\forall i\in K_1$，且$\forall j\in K_2$，$\sum\limits_{t\in K_1}\left\|A_{jt}\right\|=0$，则$A$为块广义对角占优矩阵。

证　$\forall i\in K_1$，因为$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\sum\limits_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|A_{it}\right\|$，显然$\sum\limits_{t\in K_2}\left\|A_{it}\right\|\neq 0$，所以$\exists\lambda_i>0$，使得

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\sum_{t\in K_1}\left\|A_{it}\right\|+\sum_{t\in K_2}\frac{\Lambda_t}{\lambda_i\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}\left\|A_{it}\right\| \tag{2}$$

取$\lambda=\max\{\lambda_i,\ i\in K_1\}$，则$\forall i\in K_1$，有

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|A_{it}\right\|+\sum_{t\in K_2}\frac{\Lambda_t}{\lambda\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}\left\|A_{it}\right\|$$

记

$$\alpha_i=\frac{1}{\sum\limits_{t\in K_2}\left\|A_{it}\right\|}\left(\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|A_{it}\right\|-\sum_{t\in K_2}\frac{\Lambda_t}{\lambda\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}\left\|A_{it}\right\|\right)$$

设ε满足

$$0<\varepsilon<\min\{\alpha_i,\ i\in K_1\}$$

构造正对角矩阵$D=diag(d_1I_{r1},d_2I_{r2},\cdots,d_kI_{rk})$，其中

$$d_i=\begin{cases}1 & i\in K_1\\ \varepsilon+\dfrac{\Lambda_i}{\lambda\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}} & i\in K_2\end{cases}$$

记　$B=AD=(B_{ij})$，$\Lambda_i(B)=\sum\limits_{\substack{j\in K\\ j\neq i}}\left\|B_{ij}\right\|$。当$i\in K_1$时，有

$$\left\|B_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\Lambda_i(B)=\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|B_{it}\right\|-\sum_{t\in K_2}\left\|B_{it}\right\|=\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}d_t\left\|A_{it}\right\|-\sum_{t\in K_2}d_t\left\|A_{it}\right\|=$$

$$\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|A_{it}\right\|-\sum_{t\in K_2}\left(\varepsilon+\frac{\Lambda_t}{\lambda\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}\right)\left\|A_{it}\right\|>\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|A_{it}\right\|-\sum_{t\in K_2}\frac{\Lambda_t}{\lambda\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}\left\|A_{it}\right\|-$$

$$\frac{1}{\sum\limits_{t\in K_2}\left\|A_{it}\right\|}\left(\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\left\|A_{it}\right\|-\sum_{t\in K_2}\frac{\Lambda_t}{\lambda\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}\left\|A_{it}\right\|\right)\sum_{t\in K_2}\left\|A_{it}\right\|=0$$

即对$\forall i\in K_1$，有$\left\|B_{ii}^{-1}\right\|^{-1}>\Lambda_i(B)$。

$\forall i\in K_2$，因为$\forall i\in K_2$，$\sum\limits_{t\in K_1}\left\|A_{it}\right\|=0$，即$\forall i\in K_2$，$\left\|A_{it}\right\|=0$，所以

$$\left\|B_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\Lambda_i(B)=d_i\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{t\in K_1}\left\|B_{it}\right\|-\sum_{\substack{t\in K_2\\ t\neq i}}\left\|B_{it}\right\|=d_i\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{t\in K_1}d_t\left\|A_{it}\right\|-\sum_{\substack{t\in K_2\\ t\neq i}}d_t\left\|A_{it}\right\|=$$

$$\left(\varepsilon+\frac{\Lambda_i}{\lambda\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}}\right)\left\|A_{ii}^{-1}\right\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_2\\ t\neq i}}\left(\varepsilon+\frac{\Lambda_t}{\lambda\left\|A_{tt}^{-1}\right\|^{-1}}\right)\left\|A_{it}\right\|=$$

$$\varepsilon\left(\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-\sum_{\substack{t\in K_2\\ t\neq i}}\|A_{it}\|\right)+\frac{\Lambda_i}{\lambda}-\sum_{\substack{t\in K_2\\ t\neq i}}\frac{\Lambda_t}{\lambda\|A_{tt}^{-1}\|^{-1}}\|A_{it}\|>\frac{1}{\lambda}\left(\Lambda_i-\sum_{\substack{t\in K_2\\ t\neq i}}\|A_{it}\|\right)=\frac{1}{\lambda}\sum_{t\in K_1}\|A_{it}\|=0$$

即对 $\forall i\in K_2$，有 $\|B_{ii}^{-1}\|^{-1}>\Lambda_i(B)$。故对 $\forall i\in K$，$B=AD$ 满足 $\|B_{ii}^{-1}\|^{-1}>\Lambda_i(B)$，所以 A 为块广义对角占优矩阵。 证毕

引理1[3] 若 A 为广义对角占优矩阵，P 为任一置换矩阵，则 P^TAP 也为广义对角占优矩阵。

广义严格对角占优矩阵一定至少有一个严格对角占优行[4, 5]，于是有：

引理2 若 A 为块广义对角占优矩阵，则 $K_2\neq\phi$。

定理2 矩阵 A 为块广义对角占优矩阵的必要条件是 $\exists i\in K_1$，使得 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}>\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\|A_{it}\|$。

证 (反证) 若 $\forall i\in K_1$，$\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\leqslant\sum_{\substack{t\in K_1\\ t\neq i}}\|A_{it}\|$，设有分块形式同 A 的 n 阶置换阵 P，使得

$$PAP^T=B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$$

式中 B_{11} 为 A 的 K_1 中的所有行与 K_1 中的所有列所构成的子矩阵。因为 A 为块广义对角占优矩阵，所以 B 为块广义对角占优矩阵，故 $C=\begin{pmatrix}B_{11} & 0\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$ 也是块广义对角占优矩阵，从而可知 B_{11} 为块广义对角占优矩阵，这与引理2矛盾。 证毕

2 结束语

广义对角占优矩阵和分块广义对角占优矩阵是数值分析、数学物理等领域中的重要特殊矩阵类，大型方程组迭代求解、并行迭代算法及其收敛性分析常归结为对它们的研究[1, 3~5]。分块广义对角占优矩阵严格包含了严格块对角占优矩阵、不可约块对角占优矩阵等系列重要特殊矩阵类。然而，对于分块广义对角占优矩阵的实际判定却是困难的，本文给出了一个简单实用的充分条件和一个必要条件。

参考文献

[1] Feingold D G, Varga R S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem[J]. Pacific. J. Math, 1962, (4): 1 241-1 250

[2] 高中喜，黄廷祝. 块*H*矩阵的刻画[J]. 电子科技大学学报，2002，31(3): 316-319

[3] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. New York: SIAM Press, 1994

[4] Gao Y M, Wang X H. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and *M*- matrices[J]. Lin Alg Appl, 1992, (169): 257-268

[5] 黄廷祝. 非奇*H*矩阵的简捷判据[J]. 计算数学, 1993, (3):318-328

编辑 漆蓉