第 32 卷 第 4 期 电子科技大学学报 Vol.32 No.4
2003 年 8 月 Journal of UEST of China Aug. 2003

修理延迟的*n*部件串联系统的可靠性分析*

唐应辉**1 喻国建[1] 李才良[2]

(1.电子科技大学应用数学学院 成都 610054; 2. 达县师范专科学校数学系 四川 达州 635000)

【摘要】在部件寿命服从指数分布，延迟修理时间和修理时间均服从一般分布的假设下，研究了修理延迟的 n 部件串联的可修系统。利用更新过程理论，得到了系统的可靠度$R(t)$、可用度A、首次故障前的平均时间$MTTFF$和$(0,t]$时间内的系统的平均故障次数$M(t)$等可靠性指标。

关 键 词 串联系统; 延迟; 更新过程; 可靠度; 首次故障前的平均时间

中图分类号 O213.2 **文献标识码** A

Reliability Analysis of a N-Unit Series System with Delay Repair

Tang Yinghui[1] Yu Guojian[1] Li Cailiang[2]

(1.School of Applied Mathematics,UEST of China Chengdu 610054;

2. Dept.of Mathematics, Daxian Teacher' s College Sichuan Dazhou 635000)

Abstract In this paper, a n-unit series repairable system with delay repair is studied,assuming that the systematic unit' s life has exponential distribution, the dalay repair time and the repair time both have general distribution,some primary reliabilities indexes are obtained by using renewal process theory, such as reliability $R(t)$, availability A, the mean time to first failure $MTTFF$ and the mean times to failure of the system during $(0,t]$,etc.

Key words series system; delay; renewal process ; reliability; mean time to first failure

文献[1]所研究的各类可修系统，都是假定系统发生故障后可以立即得到修理。但在实际中，系统失效后常常由于一些原因无法得到及时修理(或更换)，而需要一段等待修理时间(称为延迟修理时间)，例如修理工休假或需要请修理工等情况。因此，在系统可靠性分析中，考虑修理有延迟的情况不但十分必要，并有重要的理论意义和实用价值。本文考虑修理有延迟的 n 部件串联系统，在部件的寿命服从指数分布，延迟修理时间和修理时间均服从一般分布的假设下，利用更新过程理论，讨论系统的可靠度$R(t)$、可用度A、首次故障前的平均时间$MTTFF$和$(0,t]$时间内的系统的平均故障次数等可靠性指标。其中，模型的假设如下：

1) 系统由 n 个独立部件串联组成,有一台修理设备；

2) 系统的第 i 个部件的寿命 X_i 服从指数分布 $F_i(t)=1-\mathrm{e}^{-l_i t}, t\geq 0$，$l_i>0$，其失效后的延迟修理时间 W_i 服从一般分布 $H_i(t)$，其平均延迟修理时间为 $0<\dfrac{1}{h_i}=\int_0^\infty t\mathrm{d}H_i(t)$；修理时间 Y_i 服从一般分布 $G_i(t)$，其平均修理时间为 $0<\dfrac{1}{u_i}=\int_0^\infty t\mathrm{d}G_i(t)$，且 X_i,Y_i,W_i，相互独立，$i=1,2,\cdots,n$；

3) 当一个部件故障待修或正在修理时，其他部件停止工作，不再发生故障，此时系统处于故障状态；每个部件修复如新；

2002年9月23日收稿

* 四川省学术与技术带头人培养基金资助项目，编号：Y02001011001003

** 男 39岁 博士 教授 博士生导师 主要从事运筹学、可靠性等方面的研究

4) t=0时刻，n个部件全新，系统处于工作状态。

1 系统的可靠性分析

1.1 系统的可靠度和首次故障前的平均时间

定理1 系统的可靠度和首次故障前的平均时间分别为

$$R(t)=P\left\{\min_{1\le i\le n} X_i > t\right\}=\prod_{i=1}^{n} P\left\{X_i > t\right\}=\mathrm{e}^{-Lt} \tag{1}$$

$$MTTFF=E\left\{\min_{1\le i\le n} X_i > t\right\}=\frac{1}{L} \tag{2}$$

式中 $L=\sum_{i=1}^{n} l_i$，以下意义相同，证明略。

1.2 系统的可用度

令

$$X(t)=\begin{cases}1 & \text{当时刻}t\text{系统正常时}\\ 0 & \text{当时刻}t\text{系统故障时}\end{cases}$$

故系统的瞬时可用度为

$$A(t)=P\left\{X(t)=1 \middle| X(0)=1\right\}$$

定理2 令 $A^*(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}A(t)\mathrm{d}t$, 对 $\Re(s)>0$, 系统的瞬时可用度满足更新方程

$$A(t)=\mathrm{e}^{-Lt}+Q(t)*A(t) \tag{3}$$

稳态可用度为

$$A=1\Bigg/\left[1+\sum_{j=1}^{n} l_j\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{u_j}\right)\right] \tag{4}$$

证明 系统的工作寿命是

$$t=\min_{1\le i\le n} X_i$$

系统故障后的延迟修理时间b，修理时间g均依赖于t，当$t=\min_{1\le i\le n} X_i = X_j$时，延迟修理时间$b=W_j$，修理时间$g=Y_j$。当故障的部件修复，系统重新进入工作状态，由于指数分布的无记忆性，此时系统恢复到$t=0$时的初始状态，因此故障部件的修复时刻是系统的再生点。若令t_k、b_k和g_k分别表示系统第k个工作寿命、第k个延迟修理时间和第k个修理时间，不难证明$\{t_k+b_k+g_k,\ k=1,2,\cdots\}$是一个更新过程。其更新函数为

$$\begin{aligned}Q(t)=&P\{t_k+b_k+g_k\le t\}=P\{\min_{1\le i\le n} X_i+b+g\le t\}=\\&\sum_{j=1}^{n}P\{X_j=\min_{1\le i\le n} X_i, X_j+Y_j+W_j\le t\}=\\&\sum_{j=1}^{n}P\{X_j\le X_1,X_2,\cdots,X_{j-1},X_{j+1},\cdots,X_n, X_j+W_j+Y_j\le t\}=\\&\sum_{j=1}^{n}\int_0^t P\{u\le X_1,X_2,\cdots,X_{j-1},X_{j+1},\cdots,X_n, W_j+Y_j\le t-u\}\mathrm{d}P\{X_j\le u\}=\\&\sum_{j=1}^{n}\int_0^t P\{W_j+Y_j\le t-u\}\mathrm{e}^{-\sum_{i\ne j} l_i u}\mathrm{d}(1-\mathrm{e}^{-l_i u})=\\&-\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{L}G_j(t)H_j(t)\mathrm{e}^{-\Lambda t}\end{aligned} \tag{5}$$

对式(5)的两端作LS变换(拉普拉斯–司帝尔吉斯变换)得

$$\hat{Q}(s)=\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{s+L}\hat{G}_j(s)\hat{H}_j(s) \tag{6}$$

设 $X_j=\min\limits_{1\le i\le n} X_i$，由全概率公式，有

$$\begin{aligned}A(t)=&P\left\{X_j>t, X(t)=1\middle|X(0)=1\right\}+P\{X_j\le t<X_j+W_j+Y_j\,|\,X(0)=1\}+\\&P\left\{X_j+W_j+Y_j\le t, X(t)=1\middle|X(0)=1\right\}=\\&P\left\{X_j>t\right\}+\int_0^t P\left\{X(t)=1\middle|X(0)=1, X_j+W_j+Y_j=u\right\}\mathrm{d}P\{X_j+W_j+Y_j\le u\}=\\&\prod_{i=1}^{n}P\left\{X_i>t\right\}+Q(t)*A(t)=\\&\mathrm{e}^{-Lt}+Q(t)*A(t)\end{aligned}$$

即得式(3)。

对式(3)的两端作L变换(拉普拉斯变换),并整理即有

$$A^*(s)=\frac{1/(s+L)}{1-\hat{Q}(s)}=\left[\frac{1}{s+L}\right]\Big/\left[1-\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{s+L}\hat{G}_j(s)\hat{H}_j(s)\right]\tag{7}$$

反演上式，即得

$$A(t)=\mathrm{e}^{-Lt}+\tilde{M}(t)\mathrm{e}^{-Lt}\tag{8}$$

式中　$\tilde{M}(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}Q^{(k)}(t)$ 是更新函数。

根据式(5)，系统的稳态可用度为

$$A=\lim_{t\to\infty}A(t)=\lim_{t\to\infty}\left\{\mathrm{e}^{-Lt}+\tilde{M}(t)\mathrm{e}^{-Lt}\right\}=\frac{1}{E\left\{t_k+b_k+g_k\right\}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-Lt}\mathrm{d}t=1\Big/\left[1+\sum_{j=1}^{n}l_j\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{u_j}\right)\right]$$

1.3　(0,t]时间内系统的平均故障次数

令$N(t)$为(0,t]时间内系统故障次数，则 $M(t)=E\left\{N(t)\right\}$ 为(0,t]时间内系统的平均故障次数。

定理3　对 $\Re(s)>0$，系统的稳态故障频度为

$$M=L\Big/\left[1+\sum_{j=1}^{n}l_j\left(\frac{1}{u_j}+\frac{1}{h_j}\right)\right]\tag{9}$$

证明　设 $X_j=\min\limits_{1\le i\le n}X_i$，由全概率公式，有

$$\begin{aligned}M(t)=&E\left\{N(t)\right\}=E\{N(t)\,|\,X_j>t\}P\{X_j>t\}+\\&\int_0^t E\{N(t)\,|\,X_j+W_j+Y_j=u\}\,\mathrm{d}P\{X_j+W_j+Y_j\le u\}\end{aligned}\tag{10}$$

在式(10)右端第一项中，在 $X_j>t$ 的条件下，(0,t]中系统故障次数为0，因此 $E\{N(t)\,|\,X_j>t\}=0$；第二项中，在 $X_j\le t<X_j+W_j+Y_j$ 的条件下，(0,t]中系统刚好故障一次，因此有

$$E\{N(t)\,|\,X_j\le t<X_j+W_j+Y_j\}=1$$

第三项中，由于在 $X_j+W_j+Y_j=u$ 的条件下，(0,u]中系统已经故障了一次；从而(0,t]中系统平均故障次数等于(u,t]中平均故障次数加1；又因为 $X_j+W_j+Y_j=u$ 是系统的再生点，(u,t]中系统平均故障次数就等于(u,t]中系统平均故障次数，因此有

$$E\{N(t)\,|\,X_j+W_j+Y_j=u\}=E\left\{N(t-u)\right\}+1=M(t-u)+1$$

即有 $M(t)$ 满足如下更新方程

$$\begin{aligned}M(t)=&P\{X_j\le t<X_j+W_j+Y_j\}+\int_0^t\left[M(t-u)+1\right]\mathrm{d}P\{X_j+W_j+Y_j\le u\}=\\&P\{t\le X_j+W_j+Y_j\}-P\{t<X_j\}+Q(t)*[M(t)+1]=\\&1-Q(t)-\prod_{i=1}^{n}P\{X_j\ge t\}+Q(t)+Q(t)*M(t)=\\&1-\exp(-\sum_{i=1}^{n}l_it)+Q(t)*M(t)=1-\mathrm{e}^{-\Lambda t}+Q(t)*M(t)\end{aligned}\tag{11}$$

对式(11)的两端作LS变换，整理即得式(12)

$$\hat{M}(s)=\frac{L}{s+L-\sum_{j=1}^{n} l_j \hat{G}_j(s)\hat{H}_j(s)} \tag{12}$$

又由托贝尔定理[1]，有

$$M=\lim_{t\to\infty}\frac{M(s)}{t}=\lim_{s\to 0} s\hat{M}(s)$$

于是使用罗比塔法则即可得到式(9)。

2 几个有用的推论

推论1 当$n=1$时为修理延迟的单部件可修系统的情形，即文献[2]研究的可修系统，此时，$R(t)=\mathrm{e}^{-lt}$，$MTTFF=\frac{1}{l}$，$A=\frac{1}{1+l\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{h}\right)}=\frac{uh}{uh+ul+lh}$，$M=\frac{l}{1+l\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{h}\right)}=\frac{luh}{uh+ul+lh}$

这里 $l=l_1, u=u_1, h=h_1$，其意义分别同前，以下相同。

推论2 1) 若部件失效后，能立即得到修理，即 $h_j\to+\infty, (j=1,2,\cdots,n)$，此时为文献[1]研究的$n$个部件的串联系统，有

$$R(t)=\mathrm{e}^{-Lt} \qquad MTTFF=\frac{1}{L} \qquad A=1\Big/\left[1+\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{u_j}\right] \qquad M=L\Big/\left[1+\sum_{j=1}^{n}\frac{l_j}{u_j}\right]$$

2) 若部件失效，修理工立即修理，即 $h_j\to+\infty, (j=1,2,\cdots,n)$，并且$n=1$，此时为文献[1]研究的单部件可修系统，有

$$R(t)=\mathrm{e}^{-lt} \qquad MTTFF=\frac{1}{\lambda} \qquad A=1\Big/\left[1+\frac{l}{u}\right]=\frac{u}{l+u} \qquad M=l\Big/\left[1+\frac{l}{u}\right]=\frac{lu}{l+u}$$

本文工作得到电子科技大学青年基金(YF021102)资助，在此表示感谢。

参 考 文 献

[1] 曹晋华, 程 侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：北京科学出版社, 1986
[2] 毛 勇, 李才良, 唐应辉. 修理有延迟的单部件系统的可靠性分析[J]. 电子科技大学学报, 2000, 29(5): 545-548
[3] Tang Y H. Some new results on one unit repairable system[J]. Microelectronics And Reliability, 1996, (36): 199-202
[4] 程 侃. 寿命分布类与可靠性数学理论[M]. 北京: 科技出版社, 1999
[5] Barlow Richard E,Hunter Larry C.Reliability analysis of one-unit system[J]. Opns Res, 1996, (9): 200-208
[6] 唐应辉. 服务台可修的M/G/1/N排队系统分析[J]. 电子科技大学学报, 1994, 23(3): 317-322
[7] 王金亭. 离散时间下串联系统的可靠性分析[J]. 北方交通大学学报， 2001, 25(6): 81-84

编 辑 刘文珍