

过采样OFDM信号的峰值平均功率比*

雷霞** 李少谦

(电子科技大学通信抗干扰技术国家级重点实验室 成都 610054)

【摘要】在过采样条件下,分析了正交频分复用系统在不同采样率时,信号峰值平均功率比的统计特性。按Nyquist采样率均匀抽取出的采样点之间相互独立同分布,推广到过采样系数为2时,得到此时由各采样点之间相关系数构成的协方差矩阵,利用数值计算对其进行分析。结果表明:所有的采样点之间能近似满足相互独立同分布的关系,则可以得到此时信号峰值平均功率比概率分布的理论计算公式,并对此公式进行了仿真验证,其理论计算结果和实际仿真结果吻合。

关键词 正交频分复用; 峰值平均功率比; 过采样; 互补累积分布函数

中图分类号 TN929 文献标识码 A

Peak-to-Average Power Ratio of the Oversampling OFDM Signals

Lei Xia Li Shaoqian

(National Key Laboratory of Communication, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract Peak-to-average power ratio of orthogonal frequency division multiplexing signals is analyzed when the sampling rate is different. The samples according to Nyquist sample rate in one period of OFDM symbol are independent identically distributed random variables. When oversampling factor is 2, the covariance matrix composed of the coefficients of correlation between those samples can be calculated by numerical method. As a result, all samples in one symbol are approximately independent when oversampling factor is 2. So the probability distribution function of peak-to-average power ratio can be achieved. The results are proved by simulation.

Key words orthogonal frequency division multiplexing; peak-to-average power ratio; oversampling; complementary cumulative distribution function

在无线衰落信道下,正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)系统可以有效抑制由于多径延迟引起的符号间干扰(ISI),是一种适于无线环境下高速数据传输的技术^[1]。由于子载波间相互独立,OFDM信号的峰值平均功率比(Peak to Average Power Ratio, PAPR)较高,其要求功放具有很大的线性范围,从而造成资源浪费和成本增加,成为OFDM技术实用化的一大障碍。

OFDM信号的峰平比统计特性已经得到了广泛研究,在信号按Nyquist采样率进行采样时所得到的信号点的峰平比统计特性已经得到,并成为很多峰平比控制方案的理论基础^[2]。研究结果同时指出,在离散信号通过D/A恢复成连续信号时,会出现峰平比回升的现象,尤其在使用Nyquist采样率时,峰平比回升最为严重,因此,对过采样信号进行峰平比控制效果更加明显,但过采样信号的峰平比统计特性仍然没有得到解决^[3]。

据此,只要对信号按2倍过采样率进行采样,则所得到离散信号的峰平比统计特性和连续信号已经很

2003年8月29日收稿

* 国家863计划资助项目,编号:2001AA1230131

** 女 28岁 博士生 主要从事数字无线通信、扩频通信和OFDM方面的研究

接近。本文将通过OFDM信号对采样点之间的相关性进行分析。

1 信号模型

OFDM信号是由多个相互独立的正弦波叠加得到, 定义连续OFDM信号为

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp(j2\pi nt/T) \quad (0 \leq t < T) \quad (1)$$

式中 N 表示子载波个数, T 表示OFDM符号周期, s_n 表示第 n 个子载波上传输的数据。定义一个OFDM符号内的峰平比为

$$PAPR = 10 \lg \left[\frac{\max |S(t)|^2}{P_{av}} \right] \quad 0 \leq t < T \quad (2)$$

式中 P_{av} 表示信号的平均功率。

当信号按Nyquist采样率进行采样时, 得到的信号为^[3]

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(j \frac{2\pi nk}{N}\right) \quad 0 \leq k < N \quad (3)$$

设OFDM系统输入数据 s_n ($0 \leq n < N$) 满足条件^[4]: 1) $E[s_n]=0$, $E[|s_n|^2]=1$; 2) $\text{Re}(s_n)$ 和 $\text{Im}(s_n)$ ($0 \leq n < N$) 是相互独立同分布的实随机变量; 则输出信号平均功率 $P_{av}=E[|S_k|^2]=1$ 且 $\text{Re}(S_k)$ 和 $\text{Im}(S_k)$ ($0 \leq k < N$) 也是相互独立同分布的实随机变量。根据中心极限定理, 在 N 足够大时, $\text{Re}(S_k)$ 和 $\text{Im}(S_k)$ 均服从实高斯分布 $N(0, 1/2)$, 即 S_k 服从复高斯分布 $N(0, 1)$, 则信号瞬时功率 $|S_k|^2 = \text{Re}(S_k)^2 + \text{Im}(S_k)^2$ 服从自由度为2的 χ^2 分布

$$P_r \left[|S_k|^2 \leq \gamma \right] = 1 - e^{-\gamma} \quad 0 \leq k < N \quad (4)$$

由于此时 N 个采样点间相互独立, 则可以推出, 按Nyquist采样率进行采样时, 离散OFDM信号峰平比的CCDF为

$$P_r \left[\max_{0 \leq k \leq N-1} |S_k|^2 > \gamma \right] = 1 - (1 - e^{-\gamma})^N \quad (5)$$

当信号按 J (J 为整数) 倍过采样率进行采样时, 得到的信号为

$$S'_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left(j \frac{2\pi nk}{JN}\right) \quad 0 \leq k < JN \quad (6)$$

对其中任意均匀间隔 J 的 N 个采样点组成的序列进行讨论

$$S'_{a,l} = S'_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} s_n \exp\left[j \frac{2\pi n(lJ+a)}{JN}\right] \quad k = lJ+a, 0 \leq l < N, 0 \leq a < J \quad (7)$$

式中 a 表示序列的偏移量, l 表示该采样点在序列内的序号, 式(7)可以化简为

$$S'_{a,l} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[s_n \exp\left(j \frac{2\pi na}{JN}\right) \right] \exp\left(j \frac{2\pi nl}{N}\right) \quad (0 \leq l < N, 0 \leq a < J) \quad (8)$$

对比式(3)和式(8), 可以证明, 在 a 一定时, $s'_n = s_n \exp(j2\pi na/JN)$ 同样满足: 1) $E[s'_n]=0$, $E[|s'_n|^2]=1$; 2) $\text{Re}(s'_n)$ 和 $\text{Im}(s'_n)$ ($0 \leq n < N$) 是相互独立同分布的实随机变量。

则可以推出 $S'_{a,l}$ 的平均功率为1, 并且 $\text{Re}(S'_{a,l})$ 和 $\text{Im}(S'_{a,l})$ ($0 \leq l < N$) 是相互独立同分布的实随机变量, 均服从高斯分布 $N(0, 1/2)$, 信号瞬时功率服从自由度为2的 χ^2 分布, 并且

$$P_r \left[\max_{0 \leq l \leq N-1} |S'_{a,l}|^2 > \gamma \right] = 1 - (1 - e^{-\gamma})^N \quad (9)$$

与式(5)的结论一样。

由上述分析可以得出结论, 在过采样信号 S'_k ($0 \leq k < JN$) 中, 每一个采样点都服从复高斯分布 $N(0,1)$, 并且只要以 J 为间隔在一个符号内的采样点中任意均匀抽取 N 个样值, 都能保证其相互独立的特性, 但是, 相邻间隔不为 J 的采样点之间不一定满足相互独立的特性。

由式(3), 记为矩阵形式

$$S = As \quad (10)$$

式中 $s=(s_0, s_1, \dots, s_{N-1})^T$ 为输入数据矢量, $S=(S_0, S_1, \dots, S_{N-1})^T$ 为输出数据矢量, A 为 $N \times N$ 阶的 IDFT 变换矩阵, 其第 (k, n) 个元素为 $\exp(j2\pi nk/N)/\sqrt{N}$ 。同理, 将式(6)记为矩阵形式

$$S_j = A_j s \quad (11)$$

式中 $S_j=(S'_0, S'_1, \dots, S'_{N-1})^T$, $JN \times N$ 阶矩阵 A_j 的第 (k, n) 个元素为 $\exp(j2\pi nk/N)/\sqrt{N}$ 。由 IDFT 变换的特性, 可以得到 $N \times N$ 阶的逆矩阵 A^{-1} , 其第 (k, n) 个元素为 $\exp(-j2\pi nk/N)/\sqrt{N}$, 有

$$s = A^{-1} S \quad (12)$$

代入式(12)

$$S_j = A_j A^{-1} S \quad (13)$$

记 $B=A_j A^{-1}$, 则

$$S_j = B S \quad (14)$$

即

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(S_j) = \operatorname{Re}(B) \operatorname{Re}(S) - \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(S) \\ \operatorname{Im}(S_j) = \operatorname{Re}(B) \operatorname{Im}(S) + \operatorname{Im}(B) \operatorname{Re}(S) \end{cases} \quad (15)$$

式中 $\operatorname{Re}(\cdot)$, $\operatorname{Im}(\cdot)$ 分别表示由原复数矩阵中每个元素实部或虚部构成的新矩阵, 将式(15)写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re}(S_j) \\ \operatorname{Im}(S_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B) & -\operatorname{Im}(B) \\ \operatorname{Im}(B) & \operatorname{Re}(B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(S) \\ \operatorname{Im}(S) \end{pmatrix} \quad (16)$$

由前面的分析, $2N$ 维随机变量 $Y=(\operatorname{Re}(S), \operatorname{Im}(S))^T$ 是由 $2N$ 个独立同分布的实高斯变量构成, 服从 $2N$ 维高斯分布, $N(u_y, C_y)$, 其中, $u_y=(0, 0, \dots, 0)^T$, $C_y=I/2$, I 表示单位矩阵。

因此, 系统所关心的 $2JN$ 维随机变量 $Z=(\operatorname{Re}(S_j), \operatorname{Im}(S_j))^T$ 是由 $2N$ 维高斯变量 Y 进行线性变化得到的, 则其均值为

$$u_z = (0, 0, \dots, 0)^T \quad (17)$$

协方差矩阵为

$$C_z = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B) & -\operatorname{Im}(B) \\ \operatorname{Im}(B) & \operatorname{Re}(B) \end{pmatrix} C_y \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B) & -\operatorname{Im}(B) \\ \operatorname{Im}(B) & \operatorname{Re}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(B) \operatorname{Re}(B)^T + \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(B)^T & \operatorname{Re}(B) \operatorname{Im}(B)^T - \operatorname{Im}(B) \operatorname{Re}(B)^T \\ \operatorname{Im}(B) \operatorname{Re}(B)^T - \operatorname{Re}(B) \operatorname{Im}(B)^T & \operatorname{Re}(B) \operatorname{Re}(B)^T + \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(B)^T \end{pmatrix} \quad (18)$$

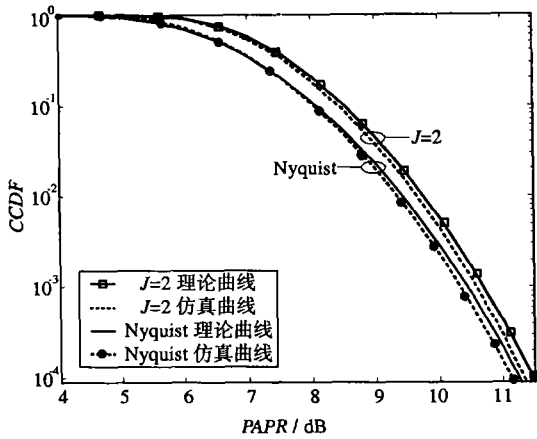
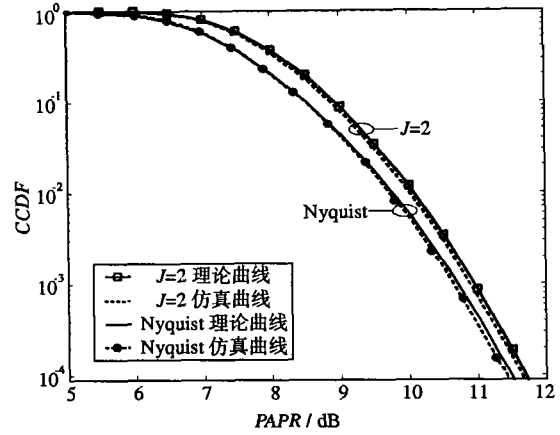
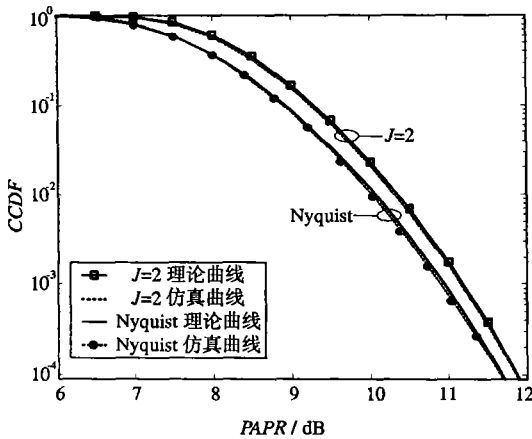
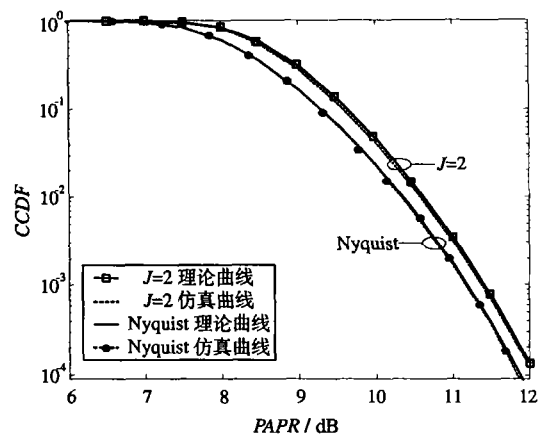
要对任意过采样率 J 得到式(18)的解析表达很困难, 本文通过数值计算的方式, 在 $J=2$ 的条件下进行分析。

由 C_z 的对称性, 对 C_z 的分析可以简化为对 $C_{z1}=\operatorname{Re}(B) \operatorname{Re}(B)^T + \operatorname{Im}(B) \operatorname{Im}(B)^T$ 和 $C_{z2}=\operatorname{Re}(B) \operatorname{Im}(B)^T - \operatorname{Im}(B) \operatorname{Re}(B)^T$ 的分析, 通过数值计算, 可以得到 $J=2$, 不同子载波数条件下 $2JN$ 维随机变量 Z 的 C_z 。分析发现, C_z 中的对角线元素全部为 $1/2$, 并且元素 (k, n) 在 k, n 均为偶数, 且 $k \neq n$ 时为 0 。这与前面的分析结果, 即, 过采样信号中每一个采样点的实部与虚部相互独立, 并服从实高斯分布 $N(0, 1/2)$ 一致。在 N 足够大时, C_{z1} 中除对角线元素为 $1/2$ 外, 其余元素接近为 0 ; 在 C_{z2} 中, 也仅有少量数据不为 0 , 因此, 可以近似的将 $4N$ 维随机变量视 Z 为相互独立, 并都服从实高斯分布, $N(0, 1/2)$, 则可以推出, 此时信号峰平比的 CCDF 为

$$P_r \left[\max_{0 \leq k \leq 2N-1} |S'_k|^2 < \gamma \right] = 1 - (1 - e^{-\gamma})^{2N} \quad (19)$$

2 仿真结果及分析

在子载波数分别为 $64, 128, 256, 512$, 调制方式为 QPSK 的条件下, 分别对 OFDM 系统在 Nyquist 采样和 $J=2$ 的过采样条件下, 信号的峰平比进行统计, 并与式(9)、(19)得到的理论曲线进行对比, 如图 1~4 中曲线所示, 在这两种条件下, 仿真得到的峰平比的 CCDF 曲线与理论分析相吻合, 并且随着子载波数的增加, 仿真曲线和理论曲线之间的差异逐渐减小, 在子载波数大于 256 时, 两者几乎重合, 从而验证了式(19)的结论成立。

图1 $N=64$, 16QAM, OFDM信号峰平比的CCDF图2 $N=128$, 16QAM, OFDM信号峰平比的CCDF图3 $N=256$, 16QAM, OFDM信号峰平比的CCDF图4 $N=512$, 16QAM, OFDM信号峰平比的CCDF

3 结 论

本文针对OFDM系统,研究了过采样系数为2时信号峰平比的统计特性。对任意过采样率的OFDM信号,要得到信号峰平比所服从概率分布的解析公式很困难,本文通过数值计算的方法,对过采样系数为2时采样点之间的相关性进行分析,得出结论:在子载波数足够大时,可以近似认为此时所在采样点之间满足相互独立同分布的关系,并且各采样点瞬时功率均服从自由度为2的 χ^2 分布,从而推出此时信号峰平比统计特性的理论计算公式,通过仿真验证了该公式的理论计算结果和实际仿真结果相吻合。

参 考 文 献

- [1] Li Y, Cimini L J. Bounds on the interchannel interference of OFDM in time-varying impairments[J]. IEEE Transactions on Communications, 2001, 49(3): 401-404
- [2] Nee R V, Prasad R. OFDM for wireless multimedia communications[M]. London, Artech House, 2000
- [3] Hideki O, Hideki I. Performance analysis of deliberately clipped OFDM signals[J]. IEEE Transactions on, Communications, 2002, 50(1): 89-101
- [4] Dov W, Nati D, Alex G. Level clipped high-order OFDM[J]. IEEE Transactions on Communications, 2000, 48(6): 928-930