第 32 卷　第 6 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.32　No.6
2003 年 12 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Dec. 2003

运动电荷间的相互作用

邝向军*　　廖　旭
(西南科技大学理学院　四川 绵阳　621002)

【摘要】利用电磁场的相对论变换关系，导出了运动电荷的电磁场，计算了运动电荷之间的相互作用力。并从定域于场的电磁场动量表达式出发，推导出了定域于电荷的似稳电磁场动量表达式，对运动电荷间相互作用力与其电磁场动量的关系进行了讨论，得出了运动电荷的相互作用力依然满足牛顿第三定律的结论。

关　键　词　运动电荷;　电磁场相对论变换;　相互作用力;　电磁场动量
中图分类号　O441　　　**文献标识码**　A

Interactive Force between Moving Charge

Kuang Xiangjun　　Liao Xu
(Southwest University of Science and Technology, Department of Nature Science　Sichuan Mianyang　621002　China)

Abstract　About interactive between moving charge, usually we try to get the Leena-wisheer potential first. At present paper, we educed the electromagnetic expression of moving charge by using the relativity transformation and calculated the interactive force between moving charge, then we got the electromagnetic momentum expression consisting in charge from the momentum expression consisting in field and discussed the relation between this interactive foce and electromagnetic momentum.

Key words　moving charge;　relativity transformation;　interactive force;　electromagnetic momentum

运动电荷间的相互作用是电动力学中的一个典型问题，一般是先求出李纳-维谢尔势，再求出运动电荷的电磁场和运动电荷间的相互作用，许多文献已经对这个问题进行了研究和讨论[1~5]。但对一些细节问题仍有待深入研究。本文利用电磁场的相对论变换关系，推导运动电荷的电磁场，计算运动电荷间的相互作用力，并对此相互作用力与电磁场动量的关系进行深入地讨论，在推导的过程中对运动电荷电磁动量与通常的典型做法有一定的区别和创新。

1　运动电荷间的相互作用力

两个点电荷 q_1、q_2 分别以$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$ 的速度匀速运动，它们所受的洛伦兹力分别为

$$\boldsymbol{F}_1 = q_1(\boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{B}_2) \qquad \boldsymbol{F}_2 = q_2(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{B}_1) \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{B}_1$ 是电荷 q_1 在电荷 q_2 处产生的电磁场，$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{B}_2$ 是电荷 q_2 在电荷 q_1 处产生的电磁场。问题关键在于求出两个运动点电荷各自在对方所在处产生的电磁场。

首先求一个匀速运动电荷的电磁场。设一点电荷q 以速度$\boldsymbol{u}$ 作匀速运动，取K'系的原点O'固定在运动电荷上，X轴沿电荷运动方向，在t=0时刻，场点P相对于电荷的位置矢量，在K系观察为$\boldsymbol{r}(x, y, z)$，在K'系观察为$\boldsymbol{r}(x', y', z')$，两组坐标之间满足洛仑兹变换

2003年6月23日收稿
* 男　35岁　博士　副教授　主要从事过渡金属原子团簇的结构和性质理论方面的研究

$$x'=\frac{x}{\sqrt{1-b^2}},\ y'=y,\ z'=z,\ r'=(x'^2+y'^2+z'^2)^{1/2}=(1-b^2)^{-1/2}S$$

式中 $S=[x^2+(1-b^2)(y^2+z^2)]^{1/2}$，$b=u/c$，**在**$t$=0**时刻**$K'$**系与**$K$**系的原点**$O'$、$O$**重合，在**$K'$**系测得场点**$P$**的电磁场为**$\boldsymbol{E}'=q\boldsymbol{r}'/4\pi e_0 r'^3$，$\boldsymbol{B}'=0$，**其分量表达式为**

$$\begin{cases}E'_x=\dfrac{qx'}{4\pi e_0 r'^3}=\dfrac{qx}{4\pi e_0 S^3}(1-b^2)\\ E'_y=\dfrac{qy'}{4\pi e_0 r'^3}=\dfrac{qy}{4\pi e_0 S^3}(1-b^2)^{3/2}\\ E'_z=\dfrac{qz'}{4\pi e_0 r'^3}=\dfrac{qz}{4\pi e_0 S^3}(1-b^2)^{3/2}\end{cases}\tag{2}$$

利用电磁场的相对论变换公式[1]**，可得到**K**系测得**P**点在同一时刻**(t=0)**的电磁场为**

$$\begin{cases}E_x=\dfrac{qx}{4\pi e_0 S^3}(1-b^2),\ B_x=0\\ E_y=\dfrac{qy}{4\pi e_0 S^3}(1-b^2),\ B_y=-\dfrac{u}{c^2}E'_z\Big/\sqrt{1-b^2}=-\dfrac{u}{c^2}E_z\\ E_z=\dfrac{qz}{4\pi e_0 S^3}(1-b^2),\ B_z=\dfrac{u}{c^2}E'_y\Big/\sqrt{1-b^2}=\dfrac{u}{c^2}E_y\end{cases}\tag{3}$$

亦可将上述各式表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=(q/4\pi e_0 S^3)(1-b^2)\boldsymbol{r}\\ \boldsymbol{B}=(1/c^2)u\times\boldsymbol{E}\end{cases}\tag{4}$$

式中

$$S=\left[x^2+(1-b^2)(y^2+z^2)\right]^{1/2}=(r^2-b^2r^2+b^2x^2)^{1/2}=r\left[(1-b^2)+\frac{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r})^2}{c^2r^2}\right]^{1/2},\quad S^{-3}=r^{-3}\left\{1-\frac{1}{c^2}\left[u^2-\frac{(u\cdot\boldsymbol{r})^2}{r^2}\right]\right\}^{-3/2},$$

考虑电荷作低速运动(**即**$u<<c$)**，则**S^{-3}**可近似表示**

$$S^{-3}\approx r^{-3}\left\{1+\frac{3}{2c^3}\left[u^2-\frac{(u\cdot\boldsymbol{r})^2}{r^2}\right]\right\}\tag{5}$$

将S^{-3}**的表达式代入式**(2)**，可得**

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\dfrac{q\boldsymbol{r}}{4\pi e_0 r^3}(1-\dfrac{u^2}{c^2})\left\{1+\dfrac{3}{2c^3}\left[u^2-\dfrac{(u\cdot\boldsymbol{r})^2}{r^2}\right]\right\}=\dfrac{q\boldsymbol{r}}{4\pi e_0 r^3}\left[1+\dfrac{u^2}{2c^2}-\dfrac{3(u\cdot\boldsymbol{r})^2}{2c^2r^2}\right]=\\ \dfrac{q\boldsymbol{r}}{4\pi e_0 r^3}-\dfrac{q}{8\pi e_0 c^2}\left[\dfrac{3(u\cdot\boldsymbol{r})^2\boldsymbol{r}}{r^5}-\dfrac{u^2\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\qquad \boldsymbol{B}=\dfrac{u\times\boldsymbol{E}}{c^2}\approx\dfrac{qu\times\boldsymbol{r}}{4\pi e_0 r^3c^2}\end{cases}\tag{6}$$

根据式(6)**可得电荷**q_1、q_2**所受的作用力分别为**

$$\boldsymbol{F}_1=\frac{q_1q_2\boldsymbol{r}_{21}}{4\pi e_0 r^3}-\frac{q_1q_2}{8\pi e_0 c^2}\left[\frac{3(u_2\cdot\boldsymbol{r}_{21})^2\boldsymbol{r}_{21}}{r^5}-\frac{u_2^2\boldsymbol{r}_{21}}{r^3}\right]+\frac{q_1q_2}{4\pi e_0 r^3c^2}u_1\times(u_2\times\boldsymbol{r}_{21})\tag{7}$$

$$\boldsymbol{F}_2=\frac{q_1q_2\boldsymbol{r}_{12}}{4\pi e_0 r^3}-\frac{q_1q_2}{8\pi e_0 c^2}\left[\frac{3(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})^2\boldsymbol{r}_{12}}{r^5}-\frac{u_1^2\boldsymbol{r}_{12}}{r^3}\right]+\frac{q_1q_S}{4\pi e_0 r^3c^2}u_2\times(u_1\times\boldsymbol{r}_{12})\tag{8}$$

式中 $r=|\boldsymbol{r}_{12}|=|\boldsymbol{r}_{21}|$，**两力的矢量和为**

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\frac{q_1q_2}{8\pi e_0 c^2}\left[(u_2^2-u_1^2)-\frac{3(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}+\frac{3(u_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}\right]\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r^3}+\frac{q_1q_2}{4\pi e_0 r^3c^2}\left[u_2\times(u_1\times\boldsymbol{r}_{12})-u_1\times(u_2\times\boldsymbol{r}_{12})\right]\tag{9}$$

由于$u_2\times(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})=u_1(u_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})-(u_2\cdot u_1)\boldsymbol{r}_{12}$，$u_1\times(u_2\times\boldsymbol{r}_{12})=u_2(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})-(u_1\cdot u_2)\boldsymbol{r}_{12}$，**所以**

$$[u_2\times(u_1\times r_{12})-u_1\times(u_2\times r_{12})]=u_1(u_2\cdot r_{12})-(u_2\cdot u_1)r_{12}-u_2(u_1\cdot r_{12})+(u_1\cdot u_2)r_{12}=$$
$$u_1(u_2\cdot r_{12})-u_2(u_1\cdot r_{12})=-r_{12}\times(u_2\times u_1)=(u_2\times u_1)\times r_{12} \tag{10}$$

代入式(9)，可得

$$\boldsymbol{F}=\frac{q_1q_2}{8\pi e_0c^2}\left[(u_2^2-u_1^2)-\frac{3(u_1\cdot \boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}+\frac{3(u_2\cdot \boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}\right]\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r^3}+\frac{q_1q_2}{4\pi e_0r^3c^2}[(u_2\times u_1)\times \boldsymbol{r}_{12}] \tag{11}$$

式(11)表明两运动电荷间的相互作用力并不等值反号，因为两运动点电荷并不构成一个封闭系统，必须将它们的电磁场包括进去才能构成一个封闭系统。

2 运动电荷间的相互作用力与电磁场动量的关系

首先，研究在似稳的情况下，带电粒子q在电磁场中的动量。根据文献[1]中电磁场动量密度的表达式，可得电磁场的动量为

$$\boldsymbol{G}=\iiint_V e_0(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}t' \tag{12}$$

其中
$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A})-(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} \tag{13}$$

由于
$$\nabla\cdot(\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EA})=(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{A} \tag{14}$$

在似稳的情况下，采用库仑规范$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，则式(13)可变为

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A})-\nabla\cdot(\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EA})+(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{A} \tag{15}$$

所以有

$$\boldsymbol{G}=e_0\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}\mathrm{d}t'+\iiint_V\nabla(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}t'-\iiint_V\nabla\cdot(\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EA})\mathrm{d}t'=$$
$$e_0\left[\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}\mathrm{d}t'+\oiint_S(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}S'-\oiint_S(\boldsymbol{AE}+\boldsymbol{EA})\mathrm{d}\boldsymbol{S}'\right] \tag{16}$$

当$S\to\infty$时，上式中的面积分趋于零，所以

$$\boldsymbol{G}=e_0\iiint_V(\nabla\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}\mathrm{d}t'=\iiint_V\nabla\boldsymbol{A}\mathrm{d}t'=\iiint_V r(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\boldsymbol{A}\mathrm{d}t'=q\boldsymbol{A} \tag{17}$$

(12)、(17)两式是似稳电磁场动量的两种等价表示。式(12)表明电磁场的动量定域于场中，而式(17)则表示似稳电磁场的动量定域于电荷q上。

点电荷作低速匀速直线运动时所产生的矢势 A 可表示为

$$\boldsymbol{A}=\frac{e_0qu}{4\pi r}+\nabla f \tag{18}$$

式中 f 为规范函数，由于$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，因此可得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{e_0q}{4\pi}\nabla\cdot\left(\frac{u}{r}\right)+\nabla^2f=0 \tag{19}$$

即
$$\nabla^2f=\frac{m_0q}{4\pi}\frac{u\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{20}$$

式(20)类似于泊松方程，其特解为$f=-\dfrac{m_0q}{8\pi}\dfrac{u\cdot\boldsymbol{r}}{r}$，所以有

$$\boldsymbol{A}=\frac{m_0qu}{4\pi r}+\nabla f=\frac{m_0q}{8\pi}\left[\frac{u}{r}+\frac{(u\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^3}\right] \tag{21}$$

依据式(17)和式(21)，很容易得到q_2在q_1的电磁场中的动量为

$$\boldsymbol{G}_2=q_2\boldsymbol{A}_{12}=\frac{m_0q_1q_2}{8\pi}\left[\frac{u_1}{r}+\frac{(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{r^3}\boldsymbol{r}_{12}\right] \tag{22}$$

q_1在q_2电磁场中的动量为

$$\boldsymbol{G}_1=q_1\boldsymbol{A}_{21}=\frac{m_0q_1q_2}{8\pi}\left[\frac{u_2}{r}+\frac{(u_2\cdot\boldsymbol{r}_{21})}{r^3}\boldsymbol{r}_{21}\right] \tag{23}$$

因此，系统的电磁场动量为

$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}_1+\boldsymbol{G}_2=\frac{m_0q_1q_2}{8\pi}\left[\frac{u_1}{r}+\frac{u_2}{r}+\frac{(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{r^3}\boldsymbol{r}_{12}+\frac{(u_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})}{r^3}\boldsymbol{r}_{12}\right] \tag{24}$$

将式(24)对时间求导，并注意到 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{12}}{\mathrm{d}t}=u_2-u_1$， $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=(u_2-u_1)\dfrac{\boldsymbol{r}_{12}}{r}$ ，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0q_1q_2}{8\pi}\left[(u_2^2-u_1^2)+\frac{3(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}-\frac{3(u_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}\right]\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r^3}+\frac{m_0q_1q_2}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}_{12}\times(u_2\times u_1) \tag{25}$$

式中 $m_0=\dfrac{1}{e_0c^2}$ ，可将上式变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}=\frac{q_1q_2}{8\pi e_0c^2}\left[(u_2^2-u_1^2)+\frac{3(u_1\cdot\boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}-\frac{3(u_2\cdot\boldsymbol{r}_{12})^2}{r^2}\right]\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r^3}-\frac{q_1q_2}{4\pi e_0c^2r^3}(u_2\times u_1)\times\boldsymbol{r}_{12} \tag{26}$$

与式(11)进行比较，显然有 $\boldsymbol{F}+\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}}{\mathrm{d}t}=0$ ，此式表明：将运动电荷和电磁场全部考虑进去后，整个系统的动量还是守恒的，即：牛顿第三定律依然是正确的，与文献[1]的结论是一致的。

参 考 文 献

[1] 郭硕鸿. 电动力学[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. 272-277, 249. 250, 195-198

[2] 曹昌骐. 电动力学, 北京: 人民教育出版社, 1961, 205-213

[3] 杰克逊 J D. 经典电动力学[M]. 下册, 北京: 人民教育出版社, 1980. 225-230

[4] 巴蒂金, 托普蒂金. 电动力学习题集[M]. 北京: 人民教育出版社, 1964. 157-160

[5] 阚仲元. 电动力学教程[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979. 158-164

编 辑 孙晓丹

(上接第664页)

表4 第1周期和第2周期的可信度分配值

命题	$m_k'(1)$	$m_k'(2)$
裂纹	0.048	0.088
气孔	0.060	0.024
夹渣	0.128	0.114
不明	0.012	0.012

表5 最后融合结果

夹渣	气孔	裂纹	不明
0.674 4	0.094 3	0.225 6	0.005 6

5 结 论

在无损检测中，引进多传感器信息融合技术，运用改进的D-S证据理论对信息进行处理不仅提高了检测的准确性，而且在不影响结论的前提下加快了计算速度。

参 考 文 献

[1] 李国华, 张永忠. 机械故障诊断[M]. 北京: 化学工业出版社, 1999

[2] 何 友, 王国宏, 彭应宁, 等. 多传感器信息融合及应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2001

[3] 王耀南, 李树涛. 多传感器信息融合及其应用综述[J]. 控制与决策, 2001, 16(5): 518-522

[4] Bogler R L. Shafer-dempster reasoning with application to multisensor target Identification system[J]. IEEE Trans, on Syst Man and Cybern, 1981, 17(6): 415-418

[5] Shafer G A. A mathematical theory of evidence[M]. Princeton, Nj, Princeton Univ, Press, 1976

[6] 鲁中健. 目标识别系统中的多源信息融合技术探讨[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(6): 40-41

[7] 许 军, 罗飞路, 张耀辉. 多传感器信息融合技术在无损检测中的应用研究[J]. 无损检测，2000, 22(8): 342-357

编 辑 孙晓丹