第 32 卷 第 6 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.32 No.6
2003 年 12 月　　Journal of UEST of China　　Dec. 2003

加速变质库存系统的最优存贮策略

张爱国*
(电子科技大学中山学院　广东　中山　528400)

【摘要】对具有加速变质的一般库存系统，在需求率为常数的前提下，利用定义目标清单和对目标函数求最优值的方法，得到了不允许缺货、允许缺货但不拖后条件下的最佳订货量及最小平均费用，给出了在上述条件下的最优存贮策略，所得结论推广了经典PLS模型的有关结论。

关　键　词　变质；　存贮；　策略；　海赛矩阵
中图分类号　O22　　文献标识码　A

Best Stockpile Stratagem for Accelerating Deteriorating Articles Store Systems

Zhang　Aiguo
(Zhongshan College, UEST of China　Gouangdong Zhongshan 528400)

Abstract　This paper is concernede with the stockpile stratagem of commodities with deterioration for a class of store systems. By means of establishing a inventory model, the optimal stockpile stratagem is obtained for this store systems. This result is an extension for classical PLS model. Under the assumption that the articles possess accelerating deterioraling properties, the demanding rate is known, this paper get the best stockpile stratagems on the condition that the system don' t pemit to runout of stock, or the system permit to runout of stock but don' t postpone the time.

Key words　deterioration;　stockpile;　stralagem;　hessian matrix

近年来，对存贮模型的讨论已有不少研究，文献[1～8]对经典存贮模型、可变进货价格模型、允许短缺、短缺量完全拖后或部分拖后等模型建立了库存策略，文献[9]对变质率为常数的库存模型得到了最优存贮策略。但在存贮实践中，变质率为时间的增函数加速变质，如蔬菜、水果、肉类的变质，木材的腐烂，钢铁的生锈等，本文对一般的加速变质库存系统进行了研究，对不允许缺货和允许缺货但短缺量不许拖后等问题给出了最优存贮策略。

1　不允许缺货的加速变质系统的存贮策略

假设需求均匀，一进货就交货，单位时间需求量为D，物品单价为p，单位物品单位时间的存贮费为h，系统不允许缺货，每次订货固定费用为k，相邻两次进货的时间即进货周期为T，物品变质率为$\alpha(t)$，$\alpha(t)$是连续非负增函数，$I(t)$表示t时刻该库存系统的库存水平，则$I(t)$满足

$$\begin{cases} I'(t) = -D - \alpha(t)I(t) \\ I(T) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1}$$

令
$$M(t) = \exp[-\int_0^t \alpha(u)\mathrm{d}u] \tag{2}$$

$$N(t) = \int_0^t \exp[\int_0^u \alpha(u)\mathrm{d}u]\mathrm{d}u \tag{3}$$

2003年9月1日收稿
** 女　38岁　学士　副教授　主要从事最优化设计方面的研究

引理 1　初值问题式(1)的解为

$$I(t)=DM(t)[N(T)-N(t)] \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{4}$$

式中　$M(t)$为减函数；$N(t)$为增函数；$M(0)=1,\ N(0)=0$, 且有

$$N'(t)M(t)=1 \tag{5}$$

$$N''(t)=\alpha(t)N'(t) \tag{6}$$

证明略。

系统的最大库存量，即进货量为

$$Q=I(0)=DN(T) \tag{7}$$

每周期进货的货款为

$$W_1=pQ=pDN(T)$$

每周期的存贮费为

$$W_2=h\int_0^T I(t)\mathrm{d}t=hD\int_0^T M(t)[N(T)-N(t)]\mathrm{d}t$$

每周期平均总费用(单位时间的总费用)为

$$\varphi(t)=\frac{1}{T}(k+W_1+W_2)=\frac{1}{T}\left\{k+pDN(T)+hD\int_0^T M(t)[N(T)-N(t)]\mathrm{d}t\right\} \tag{8}$$

记

$$g(t)=pDW'(T)+hDTN'(T)hD\int_0^T M(t)\mathrm{d}t-k-pDN(T)-hD\int_0^T M(t)[N(T)-N(t)]\mathrm{d}t \tag{9}$$

定理 1　当$T\alpha(T)\geqslant 2$时，函数$\varphi(T)$在R^+上是凸(下凸)函数且有最小值，该最小值在T^*处取得，这里T^*是方程$g(T)=0$的唯一解。

证明　由式(8)和引理1可以求得

$$\varphi'(T)=\frac{1}{T^2}g(T) \tag{10}$$

$$\varphi''(T)=\frac{1}{T^3}\Big\{pDT^2\alpha(T)N'(T)+hDT^2\alpha(T)N'(T)\int_0^T M(t)\mathrm{d}t+hDT^2-2pDTN'(t)-$$

$$2hDTN'(T)\int_0^T M(t)\mathrm{d}t+2k+2pDN(T)+2hD\int_0^T M(t)[N(T)-N(t)]\mathrm{d}t\Big\}$$

由于$N'(t)>0,\ M(t)>0,\ T\alpha(T)\geqslant 2$，故

$$pDT^2\alpha(T)N'(T)\geqslant 2pDTN'(T)$$

$$hDT^2\alpha(T)N'(T)\int_0^T M(t)\mathrm{d}t\geqslant 2hDTN'(T)\int_0^T M(t)\mathrm{d}t$$

又因$N(t)$单调递增，故$\varphi''(T)>0$，因此$\varphi(T)$在R^+上必为凸(下凸)函数，且由此可知，$\varphi(T)$在R^+内若有极值，必为极小值也是最小值。又由式(9)可知$g(0)=-k<0$，又

$$\lim_{T\to+\infty}g(T)=\lim_{T\to+\infty}\left\{pDT\left[N'(T)-\frac{N(T)}{T}\right]+hDTN'(T)\int_0^T M(t)\mathrm{d}t+hD\int_0^T M(t)[N(t)-N(T)]\mathrm{d}t-k\right\}=$$

$$\lim_{T\to+\infty}\left\{pDT\left[N'(T)-\frac{N(T)}{T}\right]+hDT\int_0^T M(t)\left[N'(T)-\frac{N(T)}{T}\right]\mathrm{d}t+hD\int_0^T M(t)N(t)\mathrm{d}t-k\right\}$$

由于$M(t)$和$N(T)$均为正函数，又由中值定理及$N'(t)$单增知

$$N'(T)-\frac{N(T)}{T}=N'(T)-N'(\xi)>0 \qquad 0<\xi<T$$

所以

$$\lim_{T\to+\infty}g(T)=+\infty$$

由式(10)可知，当$T>0$充分小时，$\varphi'(T)<0$，而当T充分大时，$\varphi'(T)>0$，据$\varphi'(T)$的连续性可知$\varphi'(T)=0$在R^+上至少有一根。另外，由$\varphi''(T)>0$知$\varphi'(T)$单增，故$\varphi'(T)=0$在R^+上至多有一根，因此，$\varphi'(T)$在R^+上有唯一的驻点T^*，而$\varphi(T^*)$即为$\varphi(T)$的最小值。

推论 1　设T^*是方程$g(T)=0$在R^+上的解，则式(7)给出最佳订货量$DN(T^*)$，式(8)给出了最小平均费用

$\varphi'(T^*)$。

2 允许短缺但不拖后的加速变质系统的库存策略

设允许短缺，但短缺量不许拖后，在短缺时只计缺货损失费[7]，并记单位物品在单位时间内的缺货损失费为$b\,(b>0)$，其他假设同前节，则t时刻的库存水平$I(t)$满足

$$\begin{cases} I'(t)=-\alpha(t)I(t)-D & 0\leqslant t\leqslant t_1 \\ I'(t)=-D & t_1<t\leqslant T \\ I(t_1)=0 \end{cases} \tag{11}$$

式中 t_1是自$t=0$到库存为0的时间。

引理 2 方程(11)的解为

$$I(t)=\begin{cases} DM(t)[N(t_1)-N(t)] & 0\leqslant t\leqslant t_1 \\ D(t_1-t) & t_1<t\leqslant T \end{cases} \tag{12}$$

最大库存量即进货量为

$$QI(0)=DN(t_1)$$

进货的货款为

$$W_1=pQ=pDN(t_1)$$

一周期的存贮费为

$$W_2=h\int_0^{t_1}I(t)\mathrm{d}t=hD\int_0^{t_1}M(t)[N(t_1)-N(t)]\mathrm{d}t$$

缺货损失费为

$$W_3=b\int_{t_1}^{T}-I(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}bD(T-t_1)^2$$

每周期的平均总费用为

$$C(t_1,T)=\frac{1}{T}\{k+W_1+W_2+W_3\}=\frac{1}{T}\left\{k+pDN(t_1)+hD\int_0^{t_1}M(t)[N(t_1)-N(t)]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}bD(T-t_1)^2\right\} \tag{13}$$

对函数$C(t_1,T)$求导并利用引理1的结论化简，可得

$$\frac{\partial C}{\partial t_1}=\frac{1}{T}\left\{pDN'(t_1)+hDN'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t-bD(T-t_1)\right\} \tag{14}$$

$$\begin{cases} A=\dfrac{\partial^2 C}{\partial t_1^2}=\dfrac{D}{T}\left\{pN''(t_1)+hN''(t_1)\displaystyle\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+h+b\right\} \\ B=\dfrac{\partial^2 C}{\partial t_1\partial T}=-\dfrac{D}{T^2}\left\{pN'(t_1)+hN'(t_1)\displaystyle\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+bt_1\right\} \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial T}=\dfrac{1}{T^2}\left\{\dfrac{bD}{2}(T^2-t_1^2)-k-pDN(t_1)-hD\displaystyle\int_0^{t_1}M(t)[N(t_1)-N(t)]\mathrm{d}t\right\} \\ E=\dfrac{\partial^2 C}{\partial T^2}=\dfrac{D}{T^3}\left\{bt_1^2+\dfrac{2k}{D}+2pN(t_1)+2h\displaystyle\int_0^{t_1}M(t)[N(t_1)-N(t)]\mathrm{d}t\right\} \end{cases} \tag{16}$$

因 $N''(t_1)=\alpha(t_1)N'(t_1)$，有

$$\begin{aligned} AE-B^2=\frac{D^2}{T^4}\Big\{&pbt_1^2\alpha(t_1)N'(t_1)+\frac{2kp}{D}\alpha(t_1)N'(t_1)+2p^2N(t_1)\alpha(t_1)N'(t_1)+ \\ &2ph\alpha(t_1)N'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)[N(t_1)-N(t)]\mathrm{d}t+bht_1^2\alpha(t_1)N'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+\frac{2kh}{D}\alpha(t_1)N'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+ \\ &2phN(t_1)\alpha(t_1)N'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+2h^2\alpha(t_1)N'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t\int_0^{t_1}M(t)[N(t_1)-N(t)]\mathrm{d}t+bht_1^2+ \\ &\frac{2k(h+b)}{D}-2ph[N'(t_1)]^2\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t-2pbt_1N'(t_1)-2bht_1N'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t\Big\} \end{aligned}$$

由于$M(t)$为减函数，$N(t)$为增函数，且$M(0)=1$，故$M(t_1)\leqslant M(t)\leqslant 1$，$N(t_1)\geqslant N(t)$，所以

$$AE-B^2\geqslant\frac{D^2}{T^4}\left\{pbt_1^2\alpha(t_1)N'(t_1)+\frac{2kp}{D}\alpha(t_1)N'(t_1)+2p^2N(t_1)\alpha(t_1)N'(t_1)+bht_1^2\alpha(t_1)N'(t_1)M(t_1)t_1+\right.$$
$$\frac{2kh}{D}\alpha(t_1)N'(t_1)M(t_1)t_1+2phN(t_1)\alpha(t_1)N'(t_1)M(t_1)t_1+bht_1^2+\frac{2k(h+b)}{D}+2p(h+b)N(t_1)-$$
$$\left.p^2[N'(t_1)]^2-h^2[N'(t_1)]^2t_1^2-2pht_1[N'(t_1)]^2-2pbt_1N'(t_1)-2bht_1^2N'(t_1)\right\}$$

但$N'(t_1)M(t_1)=1$，故

$$AE-B^2\geqslant\frac{D^2}{T^4}\left\{pbt_1^2\alpha(t_1)N'(t_1)+\frac{2kp}{D}\alpha(t_1)N'(t_1)+2p^2N(t_1)\alpha(t_1)N'(t_1)+bht_1^3\alpha(t_1)+\right.$$
$$\frac{2kh}{D}t_1\alpha(t_1)+2pht_1N(t_1)\alpha(t_1)+bht_1^2+\frac{2k(h+b)}{D}+2p(h+b)N(t_1)-$$
$$\left.(p+ht_1)^2[N'(t_1)]^2-2pbt_1N'(t_1)-2bht_1^2N'(t_1)\right\}\tag{17}$$

记

$$f(t_1)=\frac{2k(3h+b)}{D}+3bht_1^2+2p(3h+b)N(t_1)+\left[\frac{4p^2N(t_1)}{t_1}+\frac{4kp}{Dt_1}-2bht_1^2\right]M^{-1}(t_1)-(p+ht_1)^2M^{-2}(t_1)\tag{18}$$

由此有下面定理。

定理 2　当$t_1\alpha(t_1)\geqslant 2$且$f(t_1)>0$时，函数$C(t_1,T)$在区域$R^+\times R^+$上为凸(下凸)函数。

证明　由于$N''(t)>0$，故由式(15)可知$A>0$，又由以上讨论可知，当$t_1\alpha(t_1)\geqslant 2$时

$$AE-B^2\geqslant\frac{D^2}{T^4}\left\{2pbt_1N'(t_1)+\frac{4kp}{Dt_1}N'(t_1)+\frac{4p^2N(t_1)}{t_1}N'(t_1)+2bht_1^2+\frac{4kh}{D}+4phN(t_1)+\right.$$
$$\left.hbt_1^2+\frac{2k(h+b)}{D}+2p(h+b)N(t_1)-(p+ht_1)^2[N'(t_1)]^2-2pbt_1N'(t_1)-2bht_1^2N'(t_1)\right\}$$

由于$N'(t_1)=M^{-1}(t_1)$，故当$f(t_1)>0$时

$$AE-B^2\geqslant\frac{D^2}{T^4}f(t_1)>0$$

由此可知，$C(t_1,T)$的Hesse矩阵对于任意$t_1,T>0$是正定的，从而函数$C(t_1,T)$在区域$R^+\times R^+$上为凸(下凸)函数。

证毕

定理 3　当条件$Dp^2<2bk$，$t_1\alpha(t_1)\geqslant 2$，$f(t_1)>0$成立时，函数$C(t_1,T)$在$R^+\times R^+$上有唯一的极小值也是最小值。

证明　令$\frac{\partial C}{\partial t_1}=0$，$\frac{\partial C}{\partial T}=0$，由式(14)得

$$T=T(t_1)=\frac{p}{b}N'(t_1)+\frac{h}{b}N'(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+t_1\tag{19}$$

代入式(16)并注意到$N'(t_1)M(t_1)=1$，得

$$R(t_1)=\frac{bD}{2}[T^2(t_1)-t_1]-k-pDN(t_1)-hD\int_0^{t_1}M(t)[N(t_1)-N(t)]\mathrm{d}t=0\tag{20}$$

对函数$R(t_1)$求导并以式(19)代入化简可得

$$R'(t_1)=\frac{Dp^2}{b}N'(t_1)N''(t_1)+\frac{2Dph}{b}N'(t_1)N''(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+\frac{Dph}{b}[N'(t_1)]^2M(t_1)+$$
$$\frac{Dh^2}{b}[N'(t_1)]^2M(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+Dpt_1N''(t_1)+Dht_1N''(t_1)\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+Dht_1>0$$

因此，$R(t_1)$在R^+上为增函数，又$N'(0)=0$，故

$$R(0)=\frac{bD}{2}T^2(0)-k=\frac{bD}{2}\frac{p^2}{b^2}-k=\frac{Dp^2}{2b}-k<0$$

由于$N'(t_1)$为增函数，故

$$N'(t_1)-\frac{N(t_1)}{t_1}=N'(t_1)-N'(\xi)>0 \qquad 0<\xi<t_1$$

因此，由$N'(t_1)>1$ 知

$$\lim_{T\to+\infty}R(t_1)=\lim_{T\to+\infty}\left\{\frac{Dp^2}{2b}[N'(t_1)]^2+\frac{Dh^2}{2b}[N'(t_1)]^2(\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t)^2+\frac{Dph}{b}[N'(t_1)]^2\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t+PDt_1\left[N'(t_1)-\frac{N(t_1)}{t_1}\right]+\right.$$
$$\left.hDt_1\int_0^{t_1}M(t)\mathrm{d}t[N'(t_1)-\frac{N(t_1)}{t_1}]+hD\int_0^{t}M(t)N(t)\mathrm{d}t-k\right\}=+\infty$$

故函数$R(t_1)$在R^+上有唯一驻点，设为t_1^*，代入式(19)得T^*，则驻点(t_1^*,T^*)是函数$C(t_1,T)$在$R^+\times R^+$上的唯一驻点，由定理2知，$C(t_1,T)$在驻点(t_1^*,T^*)处取极小值也是最小值。

证毕

推论 2 设t_1^*是方程$R(t_1)=0$在R^+上的解，则由式(19)给出最佳周期$T^*=T(t_1^*)$，由式(13)给出最小平均费用$C(t_1^*,T^*)$，而最佳进货量为

$$Q^*=I(0)=DN(t_1^*)$$

参考文献

[1] Hadley G, Whitin T M. Analysis of inventory systems [M]. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. NJ, 1963

[2] 程承运. 一类变价格的物资库存优化模型[J]. 应用数学, 1997, 10(4): 30-32

[3] Tersine R J, Price R J. Tempoerory price discounts and EOQ[J]. J. of Purchusing and Materical Management, 1981, 17: 23-27

[4] Ardalan A. Option policies in response to a sale 1988[C]. IIE Trans, 1988, 20: 292-294

[5] 周永务. 带有临时价格折扣的库存系统的最优存贮模型[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 10: 16-21

[6] 钱颂迪. 运筹学[M]. 北京: 清华大学出版社, 1992

[7] 罗毅平, 杨逢建. 一类允许缺货的库存模型[J]. 湖南数学年刊, 1997, 17(4): 80-84

[8] 罗毅平, 张爱国. 关于"一类带有滞后需求的库存模型"一文的注记[J]. 系统工程, 1998, 16(2): 64-67

[9] 罗毅平, 杨逢建. 物品存在变质性质的库存系统的最优存贮策略[J]. 仲恺农业技术学院学报, 1999, 12(2): 43-46

编 辑 徐培红

·科研成果介绍·

机载火控雷达VXI总线自动测试系统

主研人员：白 雪 顾亚平 尹光甲 兰京川 陈光褔 黄登有 王 熠

机载火控雷达VXI总线自动测试系统由硬件平台、软件平台和测试程序集等组成。硬件平台包括主控计算机、系统测试资源以及资源阵列接口等部分。该测试系统是一个混合系统，测试资源既有VXI总线设备，又有GPIB总线仪表。系统中17个硬件模块采用了10个国产VXI模块，软件系统采用国产的"VXI总线测试软件平台"，国产化程度高，并采用VPC90接口阵列，自行研制了接口适配器，提高了系统的通用性及灵活性，解决了多种复杂参数、宽频段信号的自动测试的关键技术，具有一定的故障诊断功能。

·甬 江·