一类非线性方程的研究

李井润*　　王连圭

(电子科技大学中山学院　广东 中山　528403)

【摘要】在一类推广型非线性方程中，应用Leary-Schauder固定点定律建立了通常Sobolev空间H^s和某个权重Sobolev空间。构建一个方程初值。证明了这类推广型非线性方程的求解问题可简化为求解一个完整性连续图形上固定点j 。应用Leray-Schauder定理来证明图形上所有固定点j 严格在$B_x[0,1]$组内部存在，且在$B_x[0,1]$上的每一点是完全连续。其结果表明，该推广型方程的解能收敛成初值问题的解，即得到了该类推广型非线性方程唯一光滑解。

关　键　词　非线性方程；光滑解的整体存在性；初值问题；leary-Schauder固定点定律

中图分类号　O14　　　**文献标识码**　A

Study on a Generalized Nonlinear Equation

Li Jingrun　　Wang Liangui

(Zhongshan College, UEST of China　Guangdong Zhongshan　528403)

Abstract　Using leray-Schauder fixed point theorem with usual sobolev H^∞ and certain weighed sobolev spaces build an initial value problem of a class of the extended nonlinear equation. The way of solution this equation can transfer to solution a fixed point j of integrality uninterrupted figure had been proved. The global existing and uninterrupting of all fixed points j exist in $B_x[0,1]$ had been proved by using Leray-Schauder fixed point theorem. The result shows that solution of this equation can astringency to solution of initial value problem, get one and only smooth solution of this equation.

Key words　nonlinear equation; global existence of smooth solution; initial value problem; sobolev spaces

近年来，非线性方程

$$\mathrm{i}\partial_t u + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0 \tag{1}$$

和其推广形式的初值问题在许多文献中得到广泛的研究[1,2]，而高阶非线性方程$\mathrm{i}\partial_t u + u_{xxxx} + 8|u|^2 u_{xx} + 2u^2\overline{u}_{xx} + 4|u_x|^2 u + 6u_x^2\overline{u} + 6|u|^4 u = 0$是非线性方程lax系中的第二个方程[3~5]。由于非线性方程作为物理领域的许多数学物理模型，如孤立子、电磁波的传播方程等[1~7]。特别是发现非线性方程式(1)和下面推广型非线性方程

$$\mathrm{i}\partial_t u + u_{xx} + 2|u|^2 + b\left[u_{xxxx} + 8|u|^2 u_{xx} + 2u^2\overline{u}_{xx} + 4|u_x|^2 u + 6u_x^2\overline{u} + 6|u|^4 u\right] = 0 \tag{2}$$

文献[6～9]指出，Heisenberg自旋铁磁链方程和其四级修正自然延伸分别等效于式(1)和式(2)。下面研究方程的初值问题

$$\mathrm{i}u_t + a(u_{xx} + 2|u|^2 u) + b\ [u_{xxxx} + 8|u|^2 u_{xx} + 2u^2\overline{u}_{xx} + 4|u_x|^2 u + 6u_x^2\overline{u} + 6|u|^4 u] = 0 \tag{3}$$

$$u(x,0) = j(x) \tag{4}$$

2003年9月1日收稿

* 男　39岁　硕士　讲师　主要从事应用光学、半导体材料等方面的研究

式中 角坐标代表偏导数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,$|u|$是复变函数u的模，$\bar{u}$是u的复共轭，这里$(a,b)\neq(0,0)$。

1 定理陈述

通常，$L^p(R)$, $1<p<+\infty$和$H^s(R)$, $S\in R$分别是在|。|p|和||。|$_s$的lebesgue, Sobolev空间。如果1是一个间隔，x是一个带有模||。||$_x$的Banach空间，那么$L^P(1;\ x)\equiv\{u:1\to x,\ \|u\|_x\in L^P(1)\}$。$W_p^t(0,T;\ H^k(R))$标记有导数$(\partial_t^R\partial_x^h f(t,x)\in L^P(0,T);L^2(R))$(此处$0<s<r$, $0<h<k$))的函数$f(x,t)$的空间，用c, $c(\cdot,\cdot,\cdot)$来标记普通的常数，按照增加的方式取决于所指的量。令$x=\{0,1,2,\cdots\}$, $w(x)=(1+x)^{1/2}$和$S(R)$所有在R域上快速下降的无穷次可微的函数Schwartz空间，则对任意s, $r\in R$，H_r^s是模$||u||_{r,s}=|w^r(1-\partial_x^2)^{s/2}u|_2$，令$J_r^s\cap H_0^s$，其模$|||u|||_{r,s}=(\|u\|_{r,0}^2+\|u\|_{0,s}^2)^{1/2}$。

引理1 1) $H_{r'}^{s'}\subseteq H_s^r, J_{r'}^{s'}\subseteq J_r^s, s\le s', r\le r$; 2) $[H_{r_1}^{s};H_{r_2}^{s}]=H_{(1-q)r_1+qr_2}^{(1-q)s+qs}$, $0<q<1$, s_j, r_j, $r\in R$, $j=1,2$, 这里$[;]_q$标记复插入；3) $J_r^s\subseteq[H_r^0,H_0^s]=H_{(1-q)r}^{qs}$, $0<q<1, s,r\in R$.；4) $\bigcap_{r,s\in z}J_r^s=\bigcap_{r,s\in z}H_r^s=S(R)$；5) $(J_r^s)'=H_r^0+H_0^{-s}$；6) 令$r,s>0.1f$, 如果$u\in J_r^{rs}$,则$u\in H_{r-1}^s$和$||u||_{r-1,s}\le C(r,s)|\ \ ||u|||_{r,rs}$；7) 令$r\in R$和$s\ge 0$，那么对于$h\in z$，有$|||\partial_x^h u|||_{r,s}\le C|||u|||_{r',s'}$,此处$r'=(s+h)r/s$和$s'=s+h$；8) 如果 $s>1/2$,对所有的$u,v\in J_r^s$，有$|||uv|||_{r,s}\le C(r,s)|||u|||_{r,s}|||u|||_{r,s}$。

用上面的引理和Sobolev浸入定理可以看出，若$u\in J_r^{r(s+1)}$, $s,r\in z$和$r\neq 0$，则

$$\sup_{x\in R}|w(x)^{(r-1)}\partial_x^h u\le C(r,s)||u||_{r-1,s+1}\le C(r,s)|||u|||_{r,(s+1)r}$$

引理2 令$a(x)C_0^\infty(R)$，有$0\le a\le 1, a=1$，如果$|s|\le 1$，那么$a=0$, $0<e<1$。令$a_s(x)=a(ex)$，那么当$e\to 0$时，$a_s(x)\to 1$，任何R的束缚组上是均匀的，当$\partial_x^h a_s(x)\to 0$时，对于$j\neq 0$，在R域上是均匀的，对于任何 $j\in z$，则有$|\partial_x^h a_s(x)|\le C(j)\ e^h(w(x))^{-(1-h)}$, $0\le h\le j$，这里$C(j)>0$与e无关。

引理3 令q, r是任意满足$1<q$, $r<\infty$的实数，j, $m\in z$，$j<m$，对于有$\partial_x^m u\in L^r$, $u\in L^q$成立的u，则有$|\partial_x^j u\le C(j,m,q,r,a)|\partial_r^m|_r^a|u|_q^{1-a}$，这里对于所有间隔 $j/m<a<1$的a 有$1/p=j+a[(\frac{1}{r})-m)]+(1-a)/a$。

引理4 假定$g(t)$满足不等式，$g(t)\le M_1+M_2\int_0^T g(s)h(s)\mathrm{d}s$，对于任意$0<t<T$，在此$M_1$，$M_2$是两个非负常数，此外$h(t)$满足$\int_0^T h(t)\mathrm{d}t<\infty$，则有$g(t)\le M_1\exp(M_2\int_0^T h(t)\mathrm{d}t\big)$, $t\in[0,T]$

定理 令T是任意已知的正常数，对于任意初始数据$j\in H^s, s\in z$和$s\ge 4$，式(3)与式(4)有唯一解u，$u\in\bigcap_{h+4h\le s}w_\infty^h(0,T;H^k(R))$，其中$k,h\in z$。

2 定理证明

首先建立一个初值问题

$$u_x+e\big(-u_{xxxxxx}+u_{xxxx}-u_{xx}\big)=-\mathrm{i}(ak_1(u)+b\ \ k_2(u))\qquad 0<e<1 \tag{5}$$

用式中附加初始数据$u(x,0)=j\ \ (x)$，$k_1(u)=u_{xx}+2|u|^2u$，$k_2(u)=u_{xxxx}+8|u|^2u_{xx}+2u^2\bar{u}_{xx}+6\bar{u}(u_x)^2+4|u_x|^2u+6|u|^4u$的唯一整体解$u^s(x,t)$的存在性。考虑非线性系列和相关线性问题

$$u_t+e(-u_{xxxxxx}+u_{xxxx}-u_{xx})=-\mathrm{i}t(ak_1(u)+b\ \ k_2(u)),\ 0<e<1,\ 0<t<1 \tag{6}$$

$$u_t+e(-u_{xxxxxx}+u_{xxxx}-u_{xx})=-\mathrm{i}t(ak_1(v)+b\ \ k_2(v)),\ 0<e<1,\ 0<t<1 \tag{7}$$

把式(5)简化成一个完整性连续图形上固定的问题。引进带有有限模，并在$R_X[0,T]$上函数中的两组$x(n,T)$, $t(n,T)$, 其有限模分别为$\ll V\gg_{x(n,T)}^2=\int_0^T|V_t|_2^2\mathrm{d}t+\int_0^T\|V(t)\|_{n|3}^2\mathrm{d}t+\sup_{0\le t\le T}\|V(t)\|_{n-2}^2$和$《V》_{x(n,T)}=\int_0^T|V|_{n+1}^2\mathrm{d}t+\sup_{0\le t\le T}||V(t)||_{n-2}^2$。令$n>4$，如果$V\in Y(n,T)$，则在$X(n,T)$中存在式(7)的一个整体解$u(x,t)$，此解唯一由初始值决定，式(7)定义了一个非线性算符，$u^t=j(V,t)$，其固定点是式(6)的解，对于t=1时j的固定点是式(5)的解。

下面应用Leray-Schauder定理来决定j的固定点[8]，然后证明式(5)的解u^n收敛成式(3)的解。

引理 5　如果$n>4$和$u\in X(n,T)$，解式(7)，即

$$|u(t)|_2^2+e\int_0^T\sum_{j=1}^3|\partial_x^j u(t)|_2^2\,dt\le C(\langle\langle V\rangle\rangle)^2_{Y(n,T)+|j|_2^2}$$

$$\int_0^T|u_t|^2dt+e\int_0^T\sum_{j=1}^3|\partial_x^j u(t)|_2^2\,dt\le C(\langle\langle V\rangle\rangle)^2_{Y(n,T)+|j|_3^2}$$

$$|\partial_x^h u(t)|_2^2+e\int_0^T\sum_{j=1}^3|\partial_x^{h+j}u(t)|_2^2\,dt\le C(\langle\langle V\rangle\rangle)^2_{Y(n,T)+|j|_h^2}\qquad h\le n$$

式中　C取决于e,T和j 的纯度。

证明　用$\bar u$乘以式(7)，积分取其实部得到

$$|u(t)|_2^2+e\int_0^T\sum_{j=1}^3|\partial_x^j u(t)|_2^2\,dt\le|j|_2^2+\frac12\int_0^T|u(t)|_2^2\,dt+\frac12\int_0^T|k(v)|_2^2\,dt$$

上式意味着(用Gronwall’s不等式)

$$|u(t)|_2^2+e\int_0^T\sum_{j=1}^3|\partial_x^j u(\mathrm{t})|_2^2\,dt\le C|j|_2^2+\frac12\int_0^T|k(v)|_2^2\,dt$$

式中　$k(v)=a\,k_1(v)+b\,k_2(v)$，用标准估计和$Y(n,T)$的定义，则有

$$|u(t)|_2^2+e\int_0^T\sum_{j=1}^3|\partial_x^j u(\mathrm{t})|_2^2\,dt\le C|j|_2^2+\langle\langle V\rangle\rangle^2_{Y(n,T)}\tag{8}$$

式中　《·》表示取值

为了得到引理的第二个不等式，用$\bar u$ 乘以式(7)，对于x, t进行积分，取实部即可，最后的估计可通过先取式(7)的∂_{hx}用$\bar u_{hx}$相乘，然后关于x, t积分，取实部即

$$|\partial_x^h u(t)|_2^2+2e\int_0^T\sum_{j=1}^3|\partial_x^{h+j}u(t)|_2^2\,dt\le|\partial_x^h|_2^2+\left|\int_0^T\partial_x^h\bar u\,\partial_x^h k(v)\,dx\,dt\right|\tag{9}$$

式中　$k(v)$与前面相同，显然

$$|b|\left|\int_0^T\partial_0^T\bar u\int\partial_x^{h+4}v\,dx\,dt\right|=|b|\left|\int_0^T\int\partial_x^{h+3}\bar u\,\partial_x^{h+1}v\,dx\,dt\right|\le\frac e2\int_0^T|\partial_x^{h+3}u(t)|_2^2\,dt+C_s\int_0^T|\partial_x^{h+1}v(t)|_2^2\,dt\tag{10}$$

对于$1\le h\le 2$，有

$$\left|\int_0^T\int\partial_x^h\bar u\,\partial_x^h k_1(v)\,dx\,dt\right|=\left|\int_0^T\int\partial_x^{h+1}\bar u\,\partial_x^{h-1}\tilde k_1(v)\,dx\,dt\right|\le e\int_0^T|\partial_x^{h+1}u(t)|_2^2\,dt+C\langle\langle V\rangle\rangle^2_{Y(n,T)}\tag{11}$$

式中　$\tilde k_1(v)=ak_1(v)+b(8|v|^2\bar v_{xx}+2v^2\bar v_{xx}+6\bar v(v_x)^2+4|v_x|^2v+6|v|^2v)$，对于$h\ge 3$，有

$$\left|\int_0^T\int\partial_x^h\bar u\,\partial_x^h k_1(v)\,dx\,dt\right|=\left|\int_0^T\int\partial_x^{h+3}\bar u\,\partial_x^{h-3}\tilde k_1(v)\,dx\,dt\right|\le\frac e2\int_0^T|\partial_x^{h+3}u(t)|_2^2+C\langle\langle V\rangle\rangle^2_{Y(n,T)}\tag{12}$$

下面进行式(5)的可解性证明。如果$n>4$和$j<H^n$，对于$t[0,1]$和$v\in Y(n,T)$线性抛物方程式(7)存在唯一解$u\in X(n,T)$，这就定义了一个非线性算符$u=j(v;t)$，算符对于每一个$t[0,1]$决定了式(7)的解。用文献[9,10]提出的方法来证明Leray-Schauder的条件。考虑在$Y(n,T)$的B组上的$j(v,t)$，而$Y(n,T)$由函数$v\in Y(n,T)$组成，它满足其范围可通过加正数$r>0$而增加不等式(8)，先证明在$B_X[0,1]$上的$j(v;t)$为：1) 对v是连续的，对t是均匀的；2) 对t是连续的，对v是均匀的；3) 在$B_X[0,1]$上完全连续的。再证明j 的所有固定点严格在B组的内部和$v-f(v;0)$有非零度。用Leray-Schauder定理来证明j 的固定点的存在性为：

1) $j(v;t)$关于$Y(n,T)$中的v连续，对于$t\in(0,1)$均匀，来自B组的两个元素v, $\tilde v$作为开端，即$u=j(v,t)$和$\tilde u=j(\tilde v,t)$，则$v=u+\tilde u$和$v=v-\tilde v$满足

$$\begin{cases}U_t+e(-U_{xxxxxx}+U_{xxxx}-U_{xx})=-\mathrm{i}j[k(v)-k(v)]\\U_{(x,0)}=0\end{cases}\tag{13}$$

按引理5的证明有

$$|u(t)|_2^2+e\int_0^T\sum_{j=1}^3|D_x^j u(t)|_2^2\,dt\le C\langle\langle V\rangle\rangle^2_{Y(n,T)}$$

$$\int_0^T |U_t|_2^2\, \mathrm{d}t + e\sum_{j=1}^{3} |D_x^j u(t)|_3^2 \leq C \langle\!\langle V \rangle\!\rangle_{Y(n,T)}^2$$

$$|D_x^h U(t)|_2^2 + e\int_0^T \sum_{j=1}^{3} |D_x^{h+j} U(t)|_2^2\, \mathrm{d}t \leq C \langle\!\langle V \rangle\!\rangle_{Y(n,T)}^2$$

式中 C**与**$t \in [0,1]$**无关，以上三式给出了**1)**的证明。**

2) **在**B**上的**j **是完全连续的，进行的结果表明**j **在**$B_X[0,1]$**上的每一点都是连续的，用引理**5**对于每个**$t \in [0,1]$**，**$j(v;t)$**，把**$Y(n,T)$**中的**B**组映射到有**

$$\langle\!\langle u \rangle\!\rangle_{x(n,T)} \leq C \langle\!\langle v \rangle\!\rangle_{Y(n,T)}$$

式中 C**与**$t \in [0,1]$**无关，根据文献**[11]**的证明可知，**$x[n,T]$**中的一个组在**$Y(n,T)$**中紧致。故，**j **把**$Y(n,T)$**，**$X[0,1]$**中的任意组**$(v;t)$**映射到在**$Y(n,T)$**中是紧致的一组。这表明**$B_X[0,1]$**上的**$j(v;t)$**值紧致。**

3) **所有可能的固定点**u**严格在**B**组的内部，在引理**5**中式**(6)**的解一个先验估计和**B**组的定义表明所有可能**j **的固定点**u**严格在**B**组内部。**

4) $v - j(v;t)$ **有非零零度，对于**t=0**，**j **把**B**组映射成单独的点**u**即**$u_t + e(-u_{xxxxxx} + u_{xxxx} - u_{xx}) = 0$ **的唯一解，这样**$v - j(v;0)$ **是可逆的，有非零零度。**

由Leray-Schauder**定理的应用可知，对于每一个**$t \in [0,1]$**至少存在一个**j **的固定点**$u(x,t)$**，对**t=1**，**$u(x,T)$**是式**(5)**的一个解。式**(5)**的解的唯一性能通过标准的解使估计得到证明，显然对固定的**$e \in (0,1)$**以及**$j \in H^\infty$ **存在式**(5)**的唯一解**$u \in C^\infty([0,T];H^\infty)$**，满足式**(8)**中对于每个整数**$n$**的估计。**

从上面的讨论可知，对于$j \in H^\infty$**，**$s \geq 4$**，和每一个**$e \in (0,1)$**存在式**(5)**的唯一解**$u^s(x,t)$**，它在**$n=s$**时满足式**(8)**，且范围与**$j \in H^\infty$**，**$e \in (0,1)$**无关，用标准极限过程**$e \to 0$**，可知道存在一个后来的**$u^{s'}$**，在**$L^\infty(0,T;H^s)$**中弱收敛于某个**u**，而此**u**是式**(5)**的合适解。对于式**(5)**，可看出**$u_t \in L^\infty(0,T;H^{s-4})$**，用这种方法，得到式**(3)**和式**(4)**有唯一的解**$u \in \bigcap_{h+4h \leq s} w_\infty^h(0,T;H^k(R))$**。** **证毕**

参 考 文 献

[1] Guo B L, Tan S B. On smooth solutions to the initial value problem for the mixed Schrodinger equation[J]. Proc Roy Edinburgh A, 1991, 118(1): 1-15

[2] Ginnbre J, Velo G. On a class of nonlinear Schrodinger equation III, Ann, Inst[J]. Henri Poincare A, 1978, 28(3): 287-316

[3] Matsuno Y. Bilinearization of nonlinear evolutions, II. Higher-order modified Korteweg-de Vries equations[J]. J Phys Soc Japan, 1980, 49(6): 787-794

[4] Brull L, Lange H. Stationary, oscillatory and solitary wave type solution of singular nonlinear Schrodinger equations[J]. Math In the App Sci, 1986, 8(4): 559-575

[5] Goldman M V. Strong turbulence of plasma waves[J]. Rev Modern Phys, 1984, 56(5): 709-735

[6] Laksmanan M. On the nonlinear dynamics of the one dimensional classical Heisenberg ferromagnetic spins chain, in" Nonlinear evolution equations. Integra berg and spectral methods"[M]. Manchester University Press, 1990

[7] Pasnaes O. Supersysmmetric Heisenberg model, in "Nonlinear evolution equation and dynamics systems"[M]. World Scientific Publishing C Singapore, 1992

[8] Leray J, Scharder J. Topologie et equations functionally[J]. Ann Sci Ecole Norm Sup, 1984, 51(1): 45-58

[9] Hayashi N, Nakamitsu K, Tsutsumi M. On solutions of the initial value problem for the nonlinear Schrodinger equations[J]. J Funct Anal, 1987, 71(2): 218-245

[10] Hayashi N, Nakamitsu K, Tsutsumi M. Nonlinear Schrodinger equation in weighted Sobolev spaces[J]. Funfcialaj Ekvacioj, 1988, 31(3): 363-381

[11] Lions J L. Ouelques methods de resolutions des problems Oux limits nonlinear[M]. Paris: Gauthier-Vukkars, 1969

编 辑 刘文珍