第 32 卷 第 6 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.32 No.6
2003 年 12 月　　Journal of UEST of China　　Dec. 2003

# JOR迭代法的收敛性

袁玉波*[1]　高中喜[2]　黄廷祝[2]　刘福体[2]

(1. 西安交通大学理学院 西安 710049; 2. 电子科技大学应用数学学院 成都 6100541)

【摘要】基于双严格对角占优的概念，针对线性方程组在求解时常用的JOR迭代方法，给出了JOR迭代矩阵谱半径新的上界及迭代法的收敛性准则，不仅适用于严格对角占优矩阵，还适用于双严格对角占优矩阵类，对相应迭代阵谱半径的估计更精确且扩大了JOR方法收敛参数的选取范围，并用数值例子说明了所给结果的优越性。

**关 键 词** 收敛性; 双严格对角占优; JOR迭代法; 谱半径

**中图分类号** O241.6; O151.2　　**文献标识码** A

# Convergence for JOR Iterative Method

Yuan Yubo[1]　Gao Zhongxi[2]　Huang Tingzhu[2]　Liu Futi[2]

(1. Faculty of Sciences, Xi' an Jiaotong University. Xi' an 710049; 2. School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** JOR iterations for solving large linear system are studied. Based on the concept of the doubly diagonal dominance, an new upper bound for the spectral radius and convergence of JOR iterations are presented. Results obtained improve the known corresponding results and are suited to extended matrices. Finally, a numerical example is given for illustrating advantage of results in this paper.

**Key words** convergence; diagonal strictly dominance; JOR iteration; spectral radius

## 1 注 记

设 $\boldsymbol{R}^{n,n}$ 为 $n$ 阶实矩阵的全体，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n,n}$，记

$$N=\{1,2,\cdots,n\} \qquad R_i(\boldsymbol{A})=\sum_{i\neq j}|a_{ij}| \qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty=\max_i\sum_{j=1}^n|a_{ij}| \qquad \forall i,j\in N$$

定义 1 若 $|a_{ii}a_{jj}|>R_i(\boldsymbol{A})R_i(\boldsymbol{A}),\forall i,\ j\in N,\ i\neq j$，则称 $A$ 为双严格对角占优矩阵，记 $A\in \boldsymbol{C}$ [1]。显然，严格对角占优矩阵是双严格对角占优矩阵的特例[1]。

在求解线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，$A$ 非奇，常将 $A$ 分裂为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}-\boldsymbol{L}-\boldsymbol{U}$，其中 $\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}\ (a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，$\boldsymbol{L}$ 是矩阵 $A$ 的严格下三角矩阵，$\boldsymbol{U}$ 是矩阵 $A$ 的严格上三角矩阵。

JOR迭代格式为

$$\boldsymbol{x}^{k+1}=\boldsymbol{M}_w\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{d}$$

式中 $\boldsymbol{M}_w=\boldsymbol{D}^{-1}[(1-w)\boldsymbol{D}+w\boldsymbol{L}+w\boldsymbol{U}]$，$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{b}$。

引理 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n,n}$，则 $A$ 的每一特征值均落在下述 $\binom{n}{2}$ 个Cassini卵形域 $O_{ij}$ 并集中[2]

$$|l-a_{ii}||l-a_{jj}|\leq R_i(\boldsymbol{A})R_j(\boldsymbol{A}) \qquad \forall i,j\in N \text{ 且 } i\neq j$$

引理 2 设 $A\in \boldsymbol{C}$，则 $A$ 非奇[1,3]。

定理 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n,n}$，则 $r(\boldsymbol{A})\leq\|\boldsymbol{A}\|_\infty$ [3,4]。

---

2002年7月1日收稿

* 男 28岁 博士生 主要从事计算数学与数据挖掘方面的研究

大型方程组求解的迭代法需研究迭代法迭代阵谱半径的估计和迭代法收敛性以及收敛速度等问题。文献[4,5]对严格对角占优矩阵进行了研究，但严格对角占优矩阵由于条件较强，故难以应用。本文基于双严格对角占优矩阵的概念，得到关于JOR迭代阵谱半径上界新的估计，并进一步对JOR迭代法的收敛性进行了分析。

## 2 JOR 迭代阵谱半径的上界估计

**定理 2**　设 $A \in \boldsymbol{C}$，则JOR迭代法的迭代阵谱半径 $r(\boldsymbol{M}_w)$ 的上界满足

$$r(\boldsymbol{M}_w) \le \max_{i \ne j} |w| [R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / |a_{ii}a_{jj}|]^{\frac{1}{2}} + |1-w| \qquad i, j \in N$$

**证明**　因为 $A \in \boldsymbol{C}$，所以 $a_{i,i} \ne 0$。设 $l$ 为 $\boldsymbol{M}_w$ 的任意特征值，则

$$\det(l\ \boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}_w) = 0$$

即

$$\det[l\ D - ((1-w)D + w(L+U))] = 0$$

故使 $l\ D - [(1-w)D + w(L+U)] \in \boldsymbol{C}$ 的 $l$ 均不是 $\boldsymbol{M}_w$ 的特征值，即当

$$[l-(1-w)]^2 |a_{ii}a_{jj}| > w^2 R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$$

$l$ 不是 $\boldsymbol{M}_w$ 的特征值，若 $l$ 为 $\boldsymbol{M}_w$ 的特征值时，由引理1知，至少有一对 $i, j \ (i \ne j)$，使

$$[l-(1-w)]^2 |a_{ii}a_{jj}| \le w^2 R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U})$$

即

$$|l| \le |w| [R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / |a_{ii}a_{jj}|]^{\frac{1}{2}} + |1-w|$$

所以

$$r(\boldsymbol{M}_w) \le \max_{i \ne j} |w| [R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / |a_{ii}a_{jj}|]^{\frac{1}{2}} + |1-w| \qquad i, j \in N$$

由于Jacobi迭代法是JOR迭代法当 $w=1$ 时的特例，所以由定理2有下面推论。

**推论**　Jacobi迭代法是JOR迭代法当 $w=1$ 时的特例，所以Jacobi迭代法迭代阵谱半径的上界是

$$r(\boldsymbol{B}) \le \max_{i \ne j} [R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / (a_{ii}a_{jj})]^{\frac{1}{2}} \qquad i, j \in N$$

## 3 JOR迭代法的收敛性分析

**定理 3**　设 $A \in \boldsymbol{C}$，则JOR迭代法满足下列条件时收敛

$$0 < w < \frac{2}{1+\left[R_i(L+U)R_j(L+U)/|a_{ii}a_{jj}|\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad i, j \in N$$

**证明**　当 $w=0$ 时，$r(\boldsymbol{M}_w) \le 1$，不能判别是否收敛；当 $|w| [R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / |a_{ii}a_{jj}|]^{\frac{1}{2}} + |1-w| < 1$ 时，JOR迭代法收敛，下面分两种情形进行讨论：

1) 当 $0 < w < 1$ 时，$w[R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / |a_{ii}a_{jj}|]^{\frac{1}{2}} + (1-w) < 1$

即

$$w[R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / |a_{ii}a_{jj}|]^{\frac{1}{2}} - w < 0$$

由题设知 $A \in \boldsymbol{C}$，上式恒成立。

2) 当 $w > 1$ 时，$w[R_i(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) R_j(\boldsymbol{L}+\boldsymbol{U}) / |a_{ii}a_{jj}|]^{\frac{1}{2}} + (w-1) < 1$，整理得

$$w < \frac{2}{1 + \left[ R_i(L+U) R_j(L+U) \big/ |a_{ii} a_{jj}| \right]^{\frac{1}{2}}}$$

综上可知

$$0 < w < \frac{2}{1 + \left[ R_i(L+U) R_j(L+U) \big/ |a_{ii} a_{jj}| \right]^{\frac{1}{2}}}$$

注 1 文献[4,5]的结果仅对于严格对角占优矩阵适用，这里所得结果是双对角占优矩阵所给出的。

# 4 数值例子

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

由定理2知

$$\boldsymbol{M}_w = \begin{bmatrix} 1-w & -\frac{2w}{7} & -\frac{6w}{7} \\ 0 & 1-w & -\frac{w}{8} \\ -\frac{w}{9} & -\frac{w}{9} & 1-w \end{bmatrix}$$

$r(\boldsymbol{M}_w) \le 0.504\,0w + |1-w|$，由定理1知，$r(\boldsymbol{M}_w) \le 1 + \frac{w}{7} > 1$，由定理3知，当参数 $0 < w < 1.329\,8$ 时迭代法收敛，当 $w > 0$ 时，定理1无法判定迭代法的收敛性。

注 2 上例中的矩阵显然不是严格对角占优矩阵，所以，文献[4,5]的结果在这里不能应用。

## 参考文献

[1] Li B, Tsatsomeros M J. Doubly diagonally dominant matrices[J]. Lin. Alg. Appl., 1997, 261: 221-23

[2] James K R. Convergence of matrix iterations subject to diagonal dominance[J]. SIAM J. Num. Anal., 1973, 12: 478-484

[3] Hu Jiagan. Upper bounds of the spectral radius of some iterative matrices[J]. J. Comp. Math, 1990, 8(2): 118-127

[4] Horn R A, Johnson C R. Matrix analysis[M]. Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[5] Berman A, Plemmon P. Nonnegative matrices in the mathematical sciences[M]. SIAM Press, Piladephia, 1994

[6] 黄廷祝. 块Jacobi迭代阵的收敛性. 电子科技大学学报[J]. 1996, 25(6): 663-665

[7] 黄廷祝, 钟守铭. 关于一个Brauer定理的注记[J]. 电子科技大学学报, 1997, 26(6): 642-644

编 辑 徐培红