基于Theil不等系数的组合预测模型的性质

陈华友

(南京大学管理科学与工程研究院　南京　210093)

【摘要】基于Theil不等系数的组合预测模型是一种新的相关性的组合预测模型，研究了该模型的性质。在提出若干新概念的基础上，探讨了模型非劣性组合预测、优性组合预测以及冗余预测方法的存在性，给出了冗余信息的判定。

关　键　词　Theil不等系数；优性组合预测；预测方法优超；冗余信息

中图分类号　O221.1　　文献标识码　A

Properties of Combination Forecasting Models Based on Theil Coefficient

Chen Huayou

(Graduate School of Management Science & Engineering, Nanjing University　Nanjing　210093)

Abstract　The combination forecasting model based on Theil coefficient is a new kind of correlation one. In this paper its properties are studied. On basis of new concepts，such as superior combination forecasting and dominant forecasting method etc, the existence of noninferior combination forecasting, superior combination forecasting and redundant forecasting method are discussed. Finally redundant information is given in the determining theorem.

Key words　Theil coefficient;　superior combination forecasting;　dominant forecasting method; redundant information

文献[1]首次提出了组合预测方法。组合预测能有效地提高预测精度，一直是国内外预测界研究的热点课题[2~10]。目前应用和理论研究最多的是以某种绝对误差作为最优准则来计算出组合预测方法的权系数向量的。因此，组合预测方法的研究还不完善，需要建立多种准则的最优组合预测模型。文献[2]给出了研究组合预测方法的另一新途径，提出了相关性指标的最优组合预测模型。该模型不考虑预测误差的大小，只与组合预测方法有较大的差别。本文提出改进的Theil不等系数的组合预测模型，给出新的优性组合预测、预测方法优超等概念，在理论上说明改进的Theil不等系数的组合预测方法的有效性。

1　符号说明及概念

设某社会经济现象的指标序列的实际值为$\{x_t, t=1,2,\cdots,N\}$，有m个单项预测方法对其进行预测，这m个单项预测方法均参与到组合预测中。再设第i种单项预测方法第t时刻的预测值为x_{it}, $t=1,2,\cdots,N$，$i=1,2,\cdots,m$。第i种单项预测方法在组合预测中的加权系数为l_i，且满足

$$\sum_{i=1}^{m} l_i = 1 \qquad l_i \geq 0, \quad i=1,2,\cdots,m. \tag{1}$$

根据加权算术平均的组合预测原理，$\hat{x}_t$表示指标序列第t时刻的组合预测值，则有

收稿日期：2003－02－20
基金项目：安徽省教育厅科研基金资助项目(2002kj022)
作者简介：陈华友(1969－)，男，博士后，副教授，主要从事运筹学与经济系统工程方面的研究.

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^{m} l_i x_{it} \qquad t=1,2,\cdots,N, \tag{2}$$

定义 1 令$t_i = \sqrt{\sum_{t=1}^{N}(x_t - x_{it})^2} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}$，$i=1,2,\cdots,m,$

$$t = \sqrt{\sum_{t=1}^{N}(x_t - \hat{x}_t)^2} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2} \tag{3}$$

式中 t_i和t 分别为第i种单项预测方法预测值序列$\{x_{it}, t=1,2,\cdots,N\}$及组合预测值序列$\{\hat{x}_t, t=1,2,\cdots,N\}$与实际值序列$\{x_t, t=1,2,\cdots,N\}$改进的Theil不等系数。显然改进的Theil不等系数$t_i \in [0, \infty)$及$t \in [0, \infty)$。t值越小表示组合预测精度越高，当$t=0$时，$\hat{x}_t = x_t$，$t=1,2,\cdots,N$，表示组合预测准确无误。

令$e_{it} = x_t - x_{it}$，$e_t = x_t - \hat{x}_t$，$i=1,2,\cdots,m,\quad t=1,2,\cdots,N$，则$e_{it}$为第$i$种预测方法$t$时刻的预测误差，$e_t$为$t$时刻组合预测误差。再令$\boldsymbol{L}=(l_1,l_2,\cdots,l_m)^T$，$\boldsymbol{E}=(E_{ij})_{m\times m}$，则$\boldsymbol{L}$表示组合预测加权系数列向量，$\boldsymbol{E}$称为组合预测误差信息矩阵。其中$E_{ij}=\sum_{t=1}^{N} e_{it}e_{jt}$。在这些符号下及式(1)、式(2)，则有$\sum_{t=1}^{N}(x_t-\hat{x}_t)^2 = \sum_{t=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} l_i e_{it}\right)^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j E_{ij} = \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}$，所以改进的Theil不等系数式(3)可表示为

$$t_i = \sqrt{E_{ii}} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2}，\quad t = \sqrt{\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2} \tag{4}$$

显然组合预测值序列与实际值序列改进的Theil不等系数为组合预测方法的加权系数$l_1,l_2,\cdots,l_m$的函数，记为$t(l_1,l_2,\cdots,l_m)$。这时$t(l_1,l_2,\cdots,l_m)$越小越好，Theil不等系数越小表示组合预测方法越有效。因此基于改进的Theil不等系数的组合预测模型可为模型

$$\begin{cases} \min t(l_1,l_2,\cdots,l_m) = \sqrt{\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}} \Big/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^2} \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} l_i = 1, l_i \geq 0, \quad i=1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{5}$$

记$t_{\min} = \min\{t_i, i=1,2,\cdots,m\}$，$t_{\max} = \max\{t_i, i=1,2,\cdots,m\}$，有如下定义：

定义 2 若$t(l_1,l_2,\cdots,l_m) > t_{\max}$，则称组合预测模型为劣性组合预测，若$t_{\min} \leq t(l_1,l_2,\cdots,l_m) \leq t_{\max}$，则称为非劣性组合预测，若$t(l_1,l_2,\cdots,l_m) < t_{\min}$，则称为优性组合预测。

定义 3 若第i种、第k种单项预测方法与其他单项预测方法预测值以及实际值序列的协方差满足

$$E_{ij} < E_{kj}, \quad j=1,2,\cdots,m \tag{6}$$

则称第i种单项预测方法基于Theil不等系数优超第k种单项预测方法。

实际上，由式(6)得知$E_{ii} < E_{kk}$，从而由式(4)得知$t_i < t_k$。因此若第i种单项预测方法优超第k种，就改进的Theil不等系数而言，直观上可以认为第i种单项预测方法要“优于”第k种。

定义 4 若某种单项预测方法在组合预测模型最优权系数中为零，则称该单项预测方法为冗余预测方法。即该种单项预测方法增加到组合预测模型中不能减少组合预测改进的Theil不等系数。

定义 5 在一个组合预测模型中，设共有m种单项预测方法参与组合预测，若最优解中出现权系数为零的个数为m_1，则称比例系数$k = m_1/m$为组合预测模型的冗余度。

3 改进的Theil不等系数的组合预测模型的性质

引理1 假定$m(m<N)$种单项预测方法的预测误差向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_m$是线性无关，其中$\boldsymbol{e}_i=(e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{iN})^T$，$i=1,2,\cdots,m$，则组合预测误差信息矩阵$\boldsymbol{E}$为正定矩阵。

定理 1 在引理1的假定条件下，改进的Theil不等系数的组合预测模型的任一个可行解对应的组合预测至少是非劣性组合预测。

证明 设$\boldsymbol{L}$为组合预测模型式(1)的任一个可行解，设m种单项预测方法预测值序列与指标序列实际值改进的Theil不等系数按大小排序为：$t_{1m} \geq t_2 \geq \cdots \geq t_m$，所以对任意的$t_i$，均为

$$t_i \leq t_1 \qquad i=2,3,\cdots,m \tag{7}$$

把式(4)代入式(7)得

$$\sqrt{E_{ii}} \le t_1\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{8}$$

由引理1得知组合预测误差信息矩阵E为正定阵，其任意二阶主子式＞0，则有 $E_{ij}^{\ 2} < E_{ii}E_{jj}$，注意到$l_i \ge 0, i=1,2,\cdots,m$，从而有

$$\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{EL}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j E_{ij} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j \sqrt{E_{ii}}\sqrt{E_{jj}} = \left(\sum_{i=1}^{m} l_i\sqrt{E_{ii}}\right)^2 \tag{9}$$

由式(1)、式(8)、式(9)得

$$t=\sqrt{\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{EL}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} \le \sum_{i=1}^{m} l_i\sqrt{E_{ii}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} \le t_1\sum_{i=1}^{m} l_i\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} = t_1 \tag{10}$$

从而$t \le t_1 = \max\{t_i, i=1,2,\cdots,m\}$，再由定义3得结论成立。　　证毕

定理1表明，任意归一化非负权系数所对应的组合预测均不会比“最差”的单项预测方法还要“差”。

推论 1　简单平均组合预测方法至少是非劣性组合预测。

定理 2　在引理1的假定条件下，基于Theil不等系数的组合预测模型的冗余度$k \ne (m-1)/m$，则其最优解对应的组合预测一定是优性组合预测。

证明　设组合预测模型(1)的最优解为$\boldsymbol{L}^*=(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)^T$，设$\boldsymbol{L}=(l_1,l_2,\cdots,l_m)^T$为其一个可行解，则模型(1)的最优目标函数值$t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)$满足

$$t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*) < t(l_1,l_2,\cdots,l_m) \tag{11}$$

由式(1)、式(9)得知 $\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{EL} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j\sqrt{E_{ii}}\sqrt{E_{jj}} \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} l_i l_j \dfrac{E_{ii}+E_{jj}}{2} = \sum_{i=1}^{m} l_i E_{ii}$，所以

$$t(l_1,l_2,\cdots,l_m)=\sqrt{\boldsymbol{L}^T\boldsymbol{EL}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{m} l_i E_{ii}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} \tag{12}$$

由式(12)及式(4)得知

$$t(1,0,\cdots,0) \le \sqrt{E_{11}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} = t_1,\cdots,t(0,0,\cdots,1) \le \sqrt{E_{mm}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} = t_m \tag{13}$$

因为组合预测模型的冗余度$k \ne (m-1)/m$，所以最优解中至少有两个非0分量，所以$\boldsymbol{L}_1=(1,0,\cdots,0)^T$，$\boldsymbol{L}_2=(0,1,\cdots,0)^T$，$\cdots$，$\boldsymbol{L}_m=(0,0,\cdots,1)^T$均是组合预测模型(1)的可行解而不是最优解，则有

$$t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*) < t(1,0,\cdots,0),\ \cdots, t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*) < t(0,0,\cdots,1) \tag{14}$$

由式(13)、式(14)得知：$t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*) < \min\{t_i, i=1,2,\cdots,m\} = t_{\min}$，定义2得结论成立。　　证毕

定理 3　基于改进的Theil不等系数的组合预测模型的最优目标函数值是参与组合预测的各单项预测方法总个数m的单调不增函数，即$t(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1}) \le t(l_1^*,l_2^*,\cdots l_m^*)$。其中$t(l_1^*,l_2^*,\cdots l_m^*)$和$t(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})$分别表示$m$个单项预测方法及再增加一个单项预测方法共$m+1$个单项预测方法参与的组合预测模型(1)的最优目标函数值。

证明　设$\boldsymbol{L}^*=(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)^T$和$\bar{\boldsymbol{L}}=(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})^T$分别为$m$个单项预测方法及再增加一个单项预测方法共$m+1$个单项预测方法参与的组合预测模型(1)的最优解，则有

$$t(l_1^*,\cdots,l_m^*)=\sqrt{\boldsymbol{L}^{*T}\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{L}^*}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}},\qquad t(\bar{l}_1,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1})=\sqrt{\bar{\boldsymbol{L}}^T\boldsymbol{E}_{m+1}\,\bar{\boldsymbol{L}}}\Big/\sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\ 2}} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{E}_{m+1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{a}^T & E_{(m+1)(m+1)}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}=\left(E_{1(m+1)},E_{2(m+1)},\cdots,E_{m(m+1)}\right)^T$为前面的$m$个单项预测方法与第$(m+1)$个单项预测方法预测误差序列的协方差，$E_{(m+1)(m+1)}$表示第$(m+1)$个单项预测方法预测误差序列的方差。令$\boldsymbol{L}=(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*,0)^T$，显然$\boldsymbol{L}$为$m+1$个单项预测方法参与的组合预测模型(1)的可行解，则有$t(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1}) \le t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*,0)$，由式(15)得

$$t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*,0)=t(l_1^*,l_2^*,\cdots,l_m^*)$$

所以 $\tau(\bar{l}_1,\bar{l}_2,\cdots,\bar{l}_m,\bar{l}_{m+1}) \le \tau(l_1^*,l_2^*,\cdots l_m^*)$，结论成立。 证毕

定理3证明组合预测模型可能存在冗余预测方法。下面提供冗余信息的一个判定定理。

定理 4 在改进的Theil不等系数的组合预测模型中，若第i种单项预测方法优超第k种单项预测方法，则组合预测模型的冗余度至少为$1/m$。

证明 采用反证法。假设 $\boldsymbol{L}^* = (l_1^*,\cdots,l_i^*,\cdots,l_k^*,\cdots,l_m^*)^T$ 为组合预测模型的最优解且第k种单项预测方法不为冗余预测方法，即：$l_k^* > 0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{m} l_i^* = 1$，则与$\boldsymbol{L}^*$对应的组合预测模型的目标函数值为

$$t(l_1^*,\cdots,l_i^*,\cdots,l_k^*,\cdots,l_m^*) = \sqrt{\boldsymbol{L}^{*T}\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{L}^*} \bigg/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\,2}} \tag{16}$$

构造另外一个向量：$\hat{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L}^* + \tilde{\boldsymbol{L}} = (l_1^*,\cdots l_i^* + l_k^*,\cdots,l_m^*)$，其中 $\tilde{\boldsymbol{L}} = (0,\cdots,l_k^*,\cdots,-l_k^*,\cdots,0)^T$，即 $\tilde{\boldsymbol{L}}$ 的第i个分量为l_k^*，第k个分量为-l_k^*，其余m-2个分量全为0。显然 $\hat{L}$ 为组合预测模型(1)的一可行解，则与 $\hat{L}$ 对应组合预测模型的目标函数值为

$$t(l_1^*,\cdots,l_i^* + l_k^*,\cdots,0,\cdots,l_m^*) = \sqrt{\hat{\boldsymbol{L}}^T\boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{L}}} \bigg/ \sqrt{\sum_{t=1}^{N} x_t^{\,2}} \tag{17}$$

而

$$\hat{\boldsymbol{L}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\,\hat{\boldsymbol{L}} = (\boldsymbol{L}^* + \tilde{\boldsymbol{L}})^T\boldsymbol{E}(\boldsymbol{L}^* + \tilde{\boldsymbol{L}}) = \boldsymbol{L}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{L}^* + 2l_k^*\sum_{j\neq k} l_j^*(E_{ij} - E_{kj}) + l_k^{*2}(E_{ii} - E_{kk}) \tag{18}$$

又因为第i种单项预测方法优超第k种，所以由定义2和式(18)考虑假设 $l_k^* > 0$ 可知

$$\hat{\boldsymbol{L}}^T\boldsymbol{E}\hat{\boldsymbol{L}} < \boldsymbol{L}^{*T}\boldsymbol{E}\boldsymbol{L}^* \tag{19}$$

所以由式(16)、式(17)、式(19)得

$$t(l_1^*,\cdots,l_i^* + l_k^*,\cdots,0,\cdots,l_m^*) < t(l_1^*,\cdots,l_i^*,\cdots,l_k^*,\cdots,l_m^*)$$

而这与 $\boldsymbol{L}^*$ 为组合预测模型(1)的最优解矛盾！所以假设不成立。 证毕

4 结 束 语

本文针对改进的Theil不等系数的组合预测模型提出了非劣性组合预测、优性组合预测等新概念，探讨了其存在性，得出一些结果，从理论上进一步表明最优组合预测方法确实能综合各种单项预测方法信息。文献[2]还提出其他相关性的指标，如灰色关联度、夹角余弦、相关系数等。而对其他相关性的组合预测模型的有效性还有待进一步研究。

参 考 文 献

[1] Bates J M, Granger C W J. Combination of forecasts[J]. Operrations Research Quarterly, 1969, 20(4): 451-468

[2] 王应明. 基于相关性的组合预测方法研究[J]. 预测, 2002, 21(2): 58-62

[3] 唐小我. 组合预测误差信息矩阵研究[J]. 电子科技大学学报, 1992, 21(4): 448-454

[4] 王应明, 傅国伟. 基于不同误差准则和范数的组合预测方法研究[J]. 控制与决策, 1994, 9(1): 20-28

[5] 马永开, 杨桂元, 唐小我. 非负权重组合预测的冗余定理[J]. 系统工程理论方法应用, 1995, 4 (4): 33-39

[6] 马永开, 唐小我, 杨桂元. 非负权重最优组合预测方法的基本理论研究[J]. 运筹与管理, 1997, 6(2): 1-8

[7] 曾 勇, 唐小我, 郑维敏. 基于斯坦规则和误差校正的组合预测模型[J]. 管理科学学报, 2001, 4(6): 39-47

[8] 陈华友. 基于预测有效度的组合预测模型研究[J]. 预测, 2001, 20(3): 72-73

[9] 陈华友, 侯定丕. 基于预测有效度的优性组合预测模型研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2002, 32(2): 172-180

[10] 唐小我. 经济预测与决策新方法及其应用研究[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1997, 9-57

编 辑 刘文珍