多变量仿射非线性系统的可逆性秩判据

祁晓彬，张 玲

(中国工程物理研究院工学院 四川 绵阳 621900)

【摘要】系统的可逆性判别是非线性控制的逆系统方法的关键，为探索可逆性分析的新途径，该文将系统可逆的秩检验法引入到多变量仿射非线性系统中，其实质是将系统的可逆性判定转化为对系统的输出函数及其导数所构成的雅可比矩阵的秩条件分析。文中给出了仿射非线性系统可逆的秩判据定理与证明过程，提出了一种具体的求逆算法，最后，举例对算法进行了验证，通过与微分几何法和逆系统方法的比较说明了秩判据法的有效性。

关 键 词 仿射非系统; 可逆性; 秩判据法; 逆系统方法

中图分类号 TP273 文献标识码 A

Rank Criterion Method for Invertibility of Multivariable Affine Nonlinear System

Qi Xiaobin Zhang Ling

(Institute of Technology, CAEP Sichuan Mianyang 612900)

Abstract The main difficult in the application of inverse system method to nonlinear control system is to determine the invertibility of the system. In order to investigate new method for analyzing invertibility of system, a rank criterion method is introduced to multivariable affine nonlinear system, by which the problem of invertibility is converted to determine the rank condition of the Jacobi matrix about output and its derivation of system. The rank criterion theorem such that affine nonlinear system be invertible is proved and an algorithm is obtained to determine invertibility of the system. Finally, the algorithm mentioned is verified by using an example. The effectiveness of rank criterion method is validated by comparison with differential geometry method and inverse system method.

Key words affine nonlinear; invertibility; rank criterion method; inverse system method

针对一类仿射非线性系统，文献[1]首先用微分几何法研究了系统的可逆性。近年来，一种不同于微分几何法的反馈线性化理论——逆系统方法[2]，其物理概念清晰和应用简便的特点，在工程应用中引起了人们的关注[3, 4]。而应用逆系统方法的关键是系统的可逆性判别，由于工程实际中系统所具有的复杂非线性关系，给系统的可逆性判别带来不便。文献[5]首次针对一般非线性系统，提出了系统可逆性的秩检验法，该方法的实质是将判别系统可逆转化为分析系统输出函数及其导数所构成的雅可比矩阵的秩条件是否满足，从而为系统的可逆性判别提供了一种新的方法。因此，本文将秩检验法引入到工程应用中常见的仿射非线性系统中，给出了系统可逆的秩判据定理及其证明，并提出了一个具体的求逆算法，最后，举例验证了秩判据求逆算法的有效性。

收稿日期：2003 – 07 – 07
基金项目：中国工程物理研究院科学技术基金资助项目(20020656)
作者简介：祁晓彬(1967 –)，女，讲师，主要从事系统优化算法等方面的研究.

1 仿射非线性系统可逆的秩判据法

一般仿射非线性系统

$$\Sigma_f:\ \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(x)+\sum\limits_{i=1}^{m}B_i(x)\cdot u_i, & x(t_0)=x_0, x\in R^n, u\in R^m\\ y=C(x) & y\in R^r\end{cases} \tag{1}$$

式中 $y=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1(x)\\ \vdots\\ C_r(x)\end{bmatrix}$。

设 $\begin{cases}y_i(t)=C_i(t)\triangleq C_i^0(x),\\ y_i^{(j)}(t)\triangleq C_i^j(x,u,\dot u,\cdots,u^{(j-1)}), & i=\overline{1,r}, j=\overline{1,\alpha}\end{cases}$，其中$\alpha$为相对阶。假设$z_\alpha(t)=(\dot y^T,\cdots,y^{(\alpha)T})^T$，$V_\alpha(t)=(\dot u^T,\cdots,u^{(\alpha-1)T})$，$z_\alpha(t)$中与$x,u,V_\alpha$相互独立的分量表示为

$$\bar z(t)=(\dot{\bar y}^T,\cdots,\bar y^{(\alpha)T})^T=H_\alpha(t,x,u,V_\alpha) \tag{2}$$

引理[5] 若存在某子域$S\subset T\times D_x\times D_\alpha$，使得$rank\,J_\alpha, rank\,A_\alpha, rank\,B_\alpha$均为常数，则称$\bar z(t)=H_\alpha(t,x,u,V_\alpha)$满足局部条件。其中，$x\in D_x\subseteq R^n$，$t\in T=[t_0,t_1]$，$D_\alpha\subseteq R^{m(\alpha+1)}$，并且

$$J_\alpha=\frac{\partial(\dot{\bar y}^T,\cdots,\bar y^{(\alpha)T})^T}{\partial(u^T,V_\alpha)}=\frac{\partial(\dot{\bar y}^T,\cdots,\bar y^{(\alpha)T})^T}{\partial(u^T,\dot u^T,\cdots,u^{(\alpha-1)T})}=(A_\alpha,B_\alpha)$$

$$A_\alpha=\frac{\partial(\dot{\bar y}^T,\cdots,\bar y^{(\alpha)T})^T}{\partial u^T}$$

$$B_\alpha=\frac{\partial(\dot{\bar y}^T,\cdots,\bar y^{(\alpha)T})^T}{\partial(\dot u^T,\cdots,u^{(\alpha-1)T})}$$

下面，给出局部条件下仿射非线性系统(1)可逆的秩判据定理：

定理 若对$S\subset T\times D_x\times D_\alpha$，$rank\,J_\alpha=m+rank\,B_\alpha$，则系统(1)在域$\tau\times d_x\times d_\alpha\subseteq S$内可逆。

证明 1) $rank\,J_\alpha=s+m$

事实上，由$J_\alpha=(A_\alpha,B_\alpha)$，得$rank\,J_\alpha\leqslant rank\,A_\alpha+rank\,B_\alpha$，已知$m\leqslant rank\,A_\alpha$，而$A_\alpha$最多有$m$列，即$rank\,A_\alpha\leqslant m$，因此，$rank\,A_\alpha=m$。

又设$rank\,B_\alpha=s$，其中$s\leqslant(\alpha-1)m$，则$rank J_\alpha=s+m$。因此，在域$S_1\subset S$内，$\bar z(t)$存在s个关于V_α独立的函数，分别记为z_i，$i=1,\cdots,s$，根据隐函数定理，存在与式(2)等价的方程为

$$z_{s+i}=F_i(x,u,z_1\cdots,z_s)\quad(i=1,2,\cdots,m) \tag{3}$$

2) $rank\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_m)}=m$

在$\bar z(t)=(\dot{\bar y}^T,\cdots,\bar y^{(\alpha)T})^T=H_\alpha(t,x,u,V_\alpha)$中，将$t,x,u,V_\alpha$用$\bar t,\bar x,\bar u,\bar z_i,\bar v_j$来代替，即

$$\bar t=t,\ \bar x=x,\ \bar u=u,\ \bar z_i=z_i(t,x,u,V_\alpha),\ \bar v_j=v_j \tag{4}$$

式中 $j=s+1,\cdots,l$，$l=(\alpha-1)m$，由z_i的独立性，变换式(4)为非退化的，故J_α的秩不变，即

$$\bar J_\alpha=\frac{\partial(z_1,z_2,\cdots,z_s,z_{s+1},\cdots,z_{s+m})}{\partial(\bar u^T,\bar z_1,\cdots,\bar z_s,\bar v_{s+1},\cdots,\bar v_l)}=\begin{pmatrix}0 & I_s & 0\\ \dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(\bar u_1,\cdots,\bar u_m)} & \dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(\bar z_1,\cdots,\bar z_s)} & 0\end{pmatrix} \tag{5}$$

式中 $rank\,J_\alpha=rank\,\bar J_\alpha$成立，而$rank\,\bar J_\alpha=s+rank\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(\bar u_1,\cdots,\bar u_m)}$，$rank\,J_\alpha=s+m$，$\bar u=u$，则

$$rank\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_m)}=m \tag{6}$$

3) 设$\tau\times d_x\times d_\alpha\subseteq S_2\subseteq S_1$，证明系统$\sum_f$在$\tau\times d_x\times d_\alpha$上可逆。

现讨论式(3)相对于u的代数方程，由式(6)按隐函数定理，存在$S_2\subseteq S_1$，使得

$$\begin{cases}u_1=g_1(t,x,z)\\ \quad\vdots\\ u_m=g_m(t,x,z)\end{cases}\qquad z=(z_1,\cdots,z_s)^T \tag{7}$$

式中　反设系统$\sum_f$在$\tau\times d_x\times d_\alpha$不可逆，即存在$x_0\in d_x$及$u_1(t)\neq u_2(t)$，使得对$\forall t\in\tau$，$(u^T(t),V_\alpha(t))^T\in d_\alpha$，有$y(x(t,x_0,u_1))\equiv y(x(t,x_0,u_2))$，两端同时对$t$微分$\alpha$阶，则$z(t,x,u_1,V_{1\alpha})\equiv z(t,x,u_2,V_{2\alpha})$，将式(7)代入系统(1)的式(1)中，得到

$$\frac{dx}{dt}=A(x)+B(x)u=A(x)+B(x)g(t,x,z) \tag{8}$$

设系统(1)的初始解为$x_1(t_0)=x_0$和$x_2(t_0)=x_0$，且$x_1(t)=x(t,x_0,u_1)$、$x_2(t)=x(t,x_0,u_2)$均满足式(8)，故对$\forall t\in\tau$，$x_1(t)\equiv x_2(t)$。又由系统(1)不可逆的假设得，对$\forall t\in\tau$，$z(t,x,u_1,V_{1\alpha})=z(t,x,u_2,V_{2\alpha})$成立。故由式(7)，$u_1(t)=g(t,x_1,z)=g(t,x_2,z)=u_2(t)$，这与假设$u_1\neq u_2$矛盾，因此，系统(1)在$\tau\times d_x\times d_\alpha$上可逆。　　证毕

2　用秩检验法对仿射非线性系统的求逆算法

根据以上证明过程可得到如下求逆算法：

1) 求$J_\alpha=\dfrac{\partial(\dot{\bar{y}}^T,\cdots,\bar{y}^{(\alpha)T})^T}{\partial(u^T,V_\alpha)}=(A_\alpha,B_\alpha)$；

2) 由于$rank\,A_\alpha=m$，验证$rank\,J_\alpha=m+rank\,B_\alpha$是否成立。若成立，则系统(1)可逆，进行3)，若$r<m$，则系统(1)不可逆，停止；

3) 设$rank\,B_\alpha=s$，则在$S_1\subset S$内取$(\dot{\bar{y}}^T,\cdots,\bar{y}^{(\alpha)T})^T$中关于$V_\alpha$独立的$s$个方程，将其依次排在前$s$行，则后$z_{s+1},\cdots,z_{s+m}$个方程可由$z_1,\cdots,z_s$表示，用行变换消去相关项，且优先考虑与$u,v_\alpha$均独立的方程，使

$$rank\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(u_1,\cdots,u_m)}=m$$

4) 由$z_{s+l}=F_l(x,u,z_1,\cdots,z_s)\,(i=\overline{1,m})$，据隐函数定理解得$u=g(t,x,z)$，结合$y=C(x)$，将$u$表示为$u=g(t,x,\bar{y},\dot{\bar{y}},\cdots,\bar{y}^{(\alpha)})$的形式，停止。

例　求仿射非线性系统：$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=A(x)+u_1B_1(x)+u_2B_2(x)\\ y=C(x)\end{cases}$的逆系统，其中

$$A(x)=\begin{bmatrix}0\\ x_1x_2\\ x_2\end{bmatrix}\qquad B_1(x)=\begin{bmatrix}0\\ x_1\\ 0\end{bmatrix}\qquad B_2(x)=\begin{bmatrix}x_1e^{x_2}\\ 0\\ -x_3e^{x_2}\end{bmatrix}\qquad C(x)=\begin{bmatrix}x_2\\ x_1x_2x_3\end{bmatrix}$$

解　由已知，$y_1=x_2$，$y_2=x_1x_2x_3$，$\dot{y}_1=x_1x_2+x_1u_1$，$\dot{y}_2=x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2+x_1^2x_3u_1$，

$\ddot{y}_1=x_1^2u_1+x_1e^{x_2}u_1u_2+x_1x_2e^{x_2}u_2+x_1\dot{u}_1+x_1^2x_2$，

$\ddot{y}_2=x_1^3x_2x_3+3x_1^2x_2^2+x_1^3x_3u_1+3x_1^2x_2u_1+x_1^2x_3e^{x_2}u_1u_2+x_1^2x_2x_3e^{x_2}u_2+x_1^2x_3\dot{u}_1+x_1x_2^2e^{x_2}u_2$，并且

$$J_\alpha=\frac{\partial(\dot{y}_1,\dot{y}_2,\ddot{y}_1,\ddot{y}_2)}{\partial(u_1,u_2,\dot{u}_1,\dot{u}_2)}=\begin{bmatrix}x_1 & 0 & 0 & 0\\ x_1^2x_3 & 0 & 0 & 0\\ x_1^2+x_1e^{x_2}u_2 & x_1e^{x_2}x_2+x_1e^{x_2}u_1 & x_1 & 0\\ x_1^3x_3+3x_1^2x_2+x_1^2x_3e^{x_2}u_2 & x_1^2x_3e^{x_2}u_1+x_1^2x_2x_3e^{x_2}+x_1x_2^2e^{x_2} & x_1^2x_3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1e^{x_2}x_2+x_1e^{x_2}u_1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_1x_2^2e^{x_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}=[\boldsymbol{A}_\alpha,\boldsymbol{B}_\alpha]$$

故 $rank\,\boldsymbol{J}_\alpha=3=m+rank\,\boldsymbol{B}_\alpha=2+1$，由秩判据定理得知，该系统可逆。

事实上，由 $\dot{y}_1=x_1x_2+x_1u_1$ 得 $u_1=\dfrac{\dot{y}_1}{x_1}-x_2$，代入 $\ddot{y}_2$ 并消去 u_1 和 $\dot{u}_1$，得

$$\ddot{y}_2=3x_1x_2\dot{y}_1+x_1x_2{}^2e^{x_2}u_2+x_1x_3\ddot{y}_1$$

从而得

$$u_2=\frac{\ddot{y}_2-3x_1x_2\dot{y}_1-x_1x_3\ddot{y}_1}{x_1x_2{}^2e^{x_2}}$$

而 $rank\left[\dfrac{\partial}{\partial u}\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}\right]=2$，故 u 有唯一解：

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x_2\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/x_1 & 0 & 0 & 0\\ -3e^{-x_2}/x_2 & 0 & -x_3e^{-x_2}/x_2{}^2 & e^{-x_2}/(x_1x_2{}^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \ddot{y}_1\\ \ddot{y}_2\end{bmatrix}$$

所构成的逆系统中，需将 $\ddot{y}_1,\ddot{y}_2$ 作为输入。

经验证，此例用微分几何法和逆系统方法可得到同样的结果，但利用秩检验法，求逆过程要简便得多。

3 结 论

本文针对逆系统方法中系统可逆性判别这一关键问题，将秩检验法引入多变量仿射非线性系统中，证明了系统可逆的充分条件，并给出了具体的求逆算法，最后，举例说明了求逆的过程。本文的工作为非线性系统的可逆性研究提供了一定的理论和方法支持。

参 考 文 献

[1] Hirschorn R. M. Invertibility of multivariable nonlinear control systems[J]. IEEE Trans.Automatic Control, 1979, AC-24, 855-865

[2] 李春文, 冯元琨. 多变量非线性控制的逆系统方法[M]. 北京：清华大学出版社, 1991

[3] 夏常弟, 万百五. 利用逆系统的故障诊断方法[J]. 控制理论及应用, 1999, 16(1):132-140

[4] 葛 友, 李春文, 孙政顺. 逆系统方法在电力系统综合控制中的应用[J]. 中国电机工程学报, 2001, 4(4):1-6

[5] Kovalev A. M. The Controllability, observability and coherence of control systems, Kiev, Science Research[M]. In Russian, 1993, 137-141

编 辑 刘文珍