第 33 卷　第 1 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.33　No.1
2004 年 2 月　　Journal of UEST of China　　Feb. 2004

二维LP问题的一个直接算法

张晓军

(电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】 针对求解二维线性规划问题的几何算法—图解法, 给出了一个二维线性规划问题最优解的性质定理, 得到了求解二维线性规划问题的一个直接的代数性算法。利用该算法, 可得到一般性规划问题的加速算法, 其迭代过程至少是按二维迭代的, 迭代速度快于单纯形法。

关　键　词　线性规划;　图解法;　基平面;　单纯形法

中图分类号　O221.1　　　**文献标识码**　A

A Direct Algorithm of Two-Dimensional Linear Programming Questions

Zhang Xiaojun

(School of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　Aim at the chart solution of two-dimensional linear programming questions, a property theorem about optimum solution of two-dimensional linear programming questions was given, and a alglebraic algorithm of two-dimensional linear programming questions was gained. Then generalize the algorithm, a new algorithm of linear programming questions can gain.The new algorithm’s rapidity of convergence is faster than simplex method.

Key words　linear programming;　chart solution;　base plane;　simplex method

在数学规划中求解二维线性规划(Linear Programming, LP)问题的最直接、最有效的方法是图解法。图解法是借助几何图形进行求解，从本质上来说图解法是几何性的算法。本文讨论求解二维LP问题的一个代数算法，其基本思路是：先求出一个确定最优解的基平面，然后再利用基平面求解原问题。

1　基本定理及算法

考虑LP问题

$$\max\ z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$(L_0)\begin{cases} \boldsymbol{A}x \leq b \\ \boldsymbol{A} \in R^{m\times n},\ c,\ x \in R^n,\ b \in R^m \end{cases}$$

式中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1^T \\ \boldsymbol{a}_2^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n^T \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\|a_i\| = 1 \qquad \|c\| = 1 \quad (i = 1,2,\cdots,m\ ;\ n \leq m)$$

收稿日期：2002 – 04 – 17
作者简介：张晓军(1971 –)，男，在职博士生，主要从事运筹学与管理科学方面的研究.

这里 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ **，记可行解集为**

$$D(x) = \{x \mid Ax \le b\}$$

假设　对 $\forall \boldsymbol{a}_i, \exists\ \boldsymbol{x}^i \in D(\boldsymbol{x})$ **，** s.t　$\boldsymbol{a}_i^T \boldsymbol{x}^i = b_i$ **，** $i = 1, 2, \cdots, m$ **。**

引理1　对LP问题(L_0**)若**$\exists\, i_0\ (1 \le i_0 \le m)$**，** s.t

$$\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{a}_{i_0}\| * \|\boldsymbol{c}\| = 1$$

则最优解 x^* **必满足** $\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{x}^* = b_{i_0}$ **，故此引理结果是显然的。**

定理1　对二维LP问题(L_0**)若** $\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} = \max\limits_{1 \le i \le m} a_i^T c$ **，则最优解** $\boldsymbol{x}^*$ **必满足** $\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{x}^* = b_{i_0}$ **。**

证明

1) **若**　$\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{a}_{i_0}\| * \|\boldsymbol{c}\| = 1$ **，由引理1即可得证。**

2) **若**　$\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} < \|\boldsymbol{a}_{i_0}\| * \|\boldsymbol{c}\| = 1$ **，采用反证法。**

假设最优解 x^* **，使得** $\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{x}^* < b_{i_0}$ **，设** x^0 **为LP问题**

$$\max \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$

$$(L_1)\begin{cases} Ax \le b \\ a_{i_0}^T x = b_{i_0} \end{cases}$$

的最优解。则

$$a_{i_0}^T (x^* - x^0) < 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{c}^T (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^0) > 0 \tag{2}$$

由式(1)和式(2)有 $\exists\ \boldsymbol{g} = lc + (1 - l)a_{i_0}$ **，** $0 < l < 1$ **，** $\|\boldsymbol{g}\| < 1$　s.t**，**

$$g^T (x^* - x^0) = 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{g}^T \boldsymbol{c} = \boldsymbol{l} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{c} + (1 - \boldsymbol{l}) \boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} > \boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} \tag{4}$$

如果线段 $\overline{x^* x^0}$ **为可行域** $D(x)$ **的边界如图1所示，则存在一约束方程** $\boldsymbol{a}_j^T x \le \boldsymbol{b}_j$ **，** $1 \le j \le m$**，** $\boldsymbol{a}_j^T x^* = \boldsymbol{b}_j$ **，** $\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{x}^0 = b_j$ **，** $\boldsymbol{a}_j = \pm \dfrac{\boldsymbol{g}}{\|\boldsymbol{g}\|}$ **，若** $\boldsymbol{a}_j = \dfrac{\boldsymbol{g}}{\|\boldsymbol{g}\|}$ **，则** $\boldsymbol{a}_j^T \boldsymbol{c} > \boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c}$ **这与** $\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} = \max\limits_{1 \le i \le m} a_i^T c$ **矛盾，若** $\boldsymbol{a}_j = -\dfrac{\boldsymbol{g}}{\|\boldsymbol{g}\|}$**,设** $x^k \in D(x)$ **且** $\boldsymbol{a}_k^T (\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{x}^*) = 0$ **，** $a_k^T x^k = b_k (x^k \ne x^*, 1 \le k \le m, k \ne j)$ **，则**

$$\boldsymbol{a}_k^T (\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{x}^*) < 0 \tag{5}$$

$$c^T (x^* - x^k) \ge 0 \tag{6}$$

$$-\boldsymbol{a}_j^T (\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k) < 0 \tag{7}$$

由式(6)和式(7)有　$\exists x = mc - (1 - c)a_j$　$0 < m \le 1$**，** s.t**，**

$$x^T (x^* - x^k) = 0 \tag{8}$$

因而　$\boldsymbol{a}_k = \pm \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$　**又** $x^T (x^0 - x^*) = mc^T (x^0 - x^*) - (1 - m) a_j^T (x^0 - x^*) < 0$

由式(5)得 $\boldsymbol{a}_k = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ ， $a_k^T c = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{x}\|} \boldsymbol{x}^T c > \boldsymbol{g}^T c > a_{i_0}^T c$　**这与** $\boldsymbol{a}_{i_0}^T \boldsymbol{c} = \max\limits_{1 \le i \le m} a_i^T c$ **矛盾。**

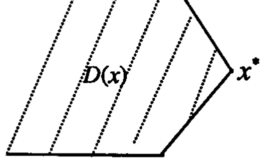

图 1　线段 $\overline{x^* x^0}$ 为 $D(x)$的边界

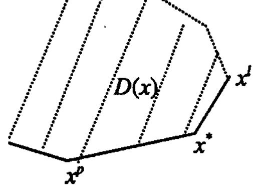

图 2　线段 $\overline{x^* x^0}$ 不为 $D(x)$的边界

如果线段$\overline{x^* x^0}$不为可行域$D(x)$的边界如图2所示。图中x^0、x^*为可行域$D(x)$的顶点，则从x^0可经过一系列可行域$D(x)$的顶点$x^1,x^2,\cdots,x^l$最后到达顶点x^*，记其下一顶点为x^p。

设

$$a_l^T(x^*-x^l), \qquad a_l^T x^* = b_l,$$

$$a_p^T x(x^*-x^p)=0, \qquad a_p^T x^* = b_p, \qquad 1\leqslant l,p\leqslant m, \qquad l\neq p,$$

$$a_l^T(x^*-x^0)>0 \tag{9}$$

$$a_p^T(x^*-x^0)>0 \tag{10}$$

$$c^T(x^*-x^p)>0 \tag{11}$$

$$c^T(x^*-x^l)>0 \tag{12}$$

若

$$\gamma^T(x^*-x^l)<0 \tag{13}$$

即x^l,x^p在直线x^0x^*的同侧。由式(11)和(13)有∃$\eta=\nu c(1-\nu)\gamma \quad 0<\nu<1$，s.t,

$$\eta^T(x^*-x^l)=0 \quad a_l=\pm\frac{\eta}{\|\eta\|} \tag{14}$$

又有

$$\eta^T(x^*-x^0)=\nu c^T(x^*-x^0)+(1-\nu)\gamma^T(x^*-x^0)>0$$

由式(9)得$a_l=\dfrac{\eta}{\|\eta\|}$，$a_l^T c=\dfrac{1}{\|\eta\|}\eta^T c>\gamma^T c>a_{l_0}^T c$

这与$a_{l_0}^T c=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} a_i^T c$矛盾。

若

$$\gamma^T(x^*-x^l)>0$$

因为x^l,x^p在直线x^0x^*的两侧，有

$$\tilde{a}^T(x^*-x^p)<0 \tag{15}$$

由式(12)和式(15)有∃$\xi=\mu c+(1-\mu)\gamma$，$0<\mu<1$，s.t,

$$\begin{cases}\xi^T(x^*-x^p)=0\\ a^p=\pm\dfrac{\xi}{\|\xi\|}\end{cases} \tag{16}$$

又

$$\xi^T(x^*-x^0)=\mu c^T(x^*-x^0)+(1-\mu)\gamma^T(x^*-x^0)>0$$

由式(10)得$a^p=\dfrac{\xi}{\|\xi\|} \qquad a_p^T c=\dfrac{1}{\|\xi\|}\xi^T c>\gamma^T c>a_{l_0}^T c$

这又与$a_{l_0}^T c=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} a_i^T c$矛盾。故最优解$x^*$必满足$a_{l_0}^T x^*=b_{l_0}$

再由1)、2) 命题得证。 证毕

推论1 对于二维LP问题(L_0)若$a_{l_0}^T c=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} a_i^T c$，$x^0$为LP问题的最优解。则$x^0$为原问题的最优解。

$$\max z=c^T x$$

$$(L_0')\begin{cases}Ax\leqslant b\\ a_{l_0}^T x=b_{l_0}\end{cases}$$

证明 采用反证法即得。

定义1　n维LP问题(L_0)若

$$\frac{(a_{i_0,j_1},a_{i_0,j_2})^T(c_{j_1},c_{j_2})}{\|(a_{i_0,j_1},a_{i_0,j_2})\|\cdot\|(c_{j_1},c_{j_2})\|}=\max_i\frac{(a_{i,j_1},a_{i,j_2})^T(c_{j_1},c_{j_2})}{\|(a_{i,j_1},a_{i,j_2})\|\cdot\|(c_{j_1},c_{j_2})\|}，$$

且$\exists x^*\in D(x)$ s.t　$\boldsymbol{a}_{i_0}^T\boldsymbol{x}^*=b_{i_0}$ 则称超平面$\boldsymbol{a}_{i_0}^T\boldsymbol{x}=b_{i_0}$为关于$(x_{j_1},x_{j_2})$的基平面。

由定理1可以直接求解二维LP问题。

例如，求解LP问题如下：

$$\max \boldsymbol{z}=2\boldsymbol{x_1}+3\boldsymbol{x_2}$$

$$(L_0)\begin{cases}2x_1-x_2\leq 2\\ x_1+x_2\leq 5\\ -x_1+x_2\leq 4\\ -x_1\leq 0\\ -x_2\leq 0\end{cases}$$

解　1) $\dfrac{(1,1)^T(2,3)}{\sqrt{2}\times\sqrt{13}}=\max\limits_i\dfrac{a_i^Tc}{\|a_i\|\cdot\|c\|}$ 确定基平面为　$x_1+x_2=5$；

2) 用基平面$x_1+x_2=5$消去(L_0)中的x_1得$\max\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}_2+10$

$$(L_1)\begin{cases}-3x_2\leq -10\\ 2x_2\leq 9\\ x_2\leq 5\\ -x_2\leq 0\end{cases}$$

解之得　$x_2^*=9/2$；

3) 将$x_2^*=9/2$代入基平面$x_1+x_2=5$得$x_1^*=1/2$，即最优解$\boldsymbol{x}^*=(1/2,9/2)$，最优值$z^*=29/2$。

2　结 束 语

单纯形法是求解LP问题的最常用的方法，其迭代过程是一维线性迭代的。本文给出的加速算法至少是二维迭代的，其迭代速度优于单纯形法。

参 考 文 献

[1] Dantzig G B. linear programming and extensions[M]. Princeton University Press, 1963

[2] Khachian L G. A polynomial algorithm in linear programming[J].Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20: 191-194

[3] Karmarkar N. A new polynomail time algorithm for linear programming[J].Combinatorica, 1984, 4: 373-395

[4] 杨德庄. 线性规划的新算法[J]. 中国科学, 1998, 28(1): 257-264

[5] Fang Shucheng, Sarat Puthenpura. Linear optimizaation and extensions theroy and algorithms [M]. 汪定伟、王梦光译. 北京：科学技术出版社

编　辑　刘文珍