

# 分布式时延范台坡方程的Hopf分岔

李绍荣<sup>1</sup>, 李绍文<sup>2</sup>, 廖晓峰<sup>3</sup>

(1. 电子科技大学光电信息学院 成都 610054; 2. 西南财经大学经济数学系 成都 610074; 3. 电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**【摘要】**分析了分布式时延的范台坡方程, 将平均时延作为分岔参数, 证明了模型经历了Hopf分岔过程, 用图示Hopf理论获得了判定分岔周期解的稳定性和分岔方向的准则。并应用数字仿真的例子证明了理论分析的正确性。

**关键词** 范台坡方程; 分布时延; Hopf分岔; 周期解

**中图分类号** TN711.4; O193 **文献标识码** A

## Hopf Bifurcation for Van Der Pol Equation with Distributed Delay

Li Shaorong<sup>1</sup>, Li Shaowen<sup>2</sup>, Liao Xiaofeng<sup>3</sup>

(1. School of Opto-Electronic Information, UEST of China Chengdu 610054; 2. Department of Mathematics, Southwest University of Finance and Economics Chendu 610074; 3. School of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** The van der Pol equation with a distributed time delay is analyzed. By using the mean time delay as a bifurcation parameter, the model is found to undergo a sequence of Hopf bifurcations. The direction and the stability criteria of the bifurcating periodic solutions are obtained by the graphical Hopf bifurcation theory. Numerical simulation examples for justifying the theoretical analysis are also given.

**Key words** van der Pol equation; distributed delay; Hopf bifurcation; periodic solutions

### 1 绪论

范台坡方程描述了晶体管线路的振荡现象<sup>[1-3]</sup>, 具体由下面二阶非线性系统描述

$$\begin{cases} dx_1^*(t)/dt = x_2^*(t) - f(x_1^*(t)) \\ dx_2^*(t)/dt = -x_1^*(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $f(x) = ax + bx^3$ 。如果  $f(x)$  中的参数  $a > 0$ ,  $b > 0$ , 那么原点全局渐近稳定, 因此在方程(1)中没有稳定的周期解; 如果  $a < 0$ ,  $b > 0$ , 则存在唯一的稳定周期解。

需要指出的是, 研究Hopf分岔的工作通常是在时滞微分方程的状态空间中讨论的<sup>[4,5]</sup>, 通常称为“时域”方法。最近, 在一些文献中提出了一种研究微分方程的新方法<sup>[6-8]</sup>, 应用反馈系统的理论与方法, 即在状态空间中作拉普拉斯变换后在复数域中进行分析, 称之为“频域”方法<sup>[8-10]</sup>。本文将弱核分布式时延引入范台坡方程中, 运用“频域”方法获得Hopf分岔的存在性, 以及分岔周期解的稳定性和分岔方向。

### 2 Hopf分岔的存在性

考虑分布式时延范台坡方程

收稿日期: 2003-09-06

作者简介: 李绍荣(1964-), 男, 大学, 副教授, 主要从事非线性动力学方面的研究。

$$\begin{cases} dx_1^*(t)/dt = \int_0^{+\infty} k(t)x_2^*(t-t)dt - f\left(\int_0^{+\infty} k(t)x_1^*(t-t)dt\right) \\ dx_2^*(t)/dt = -\int_0^{+\infty} k(t)x_1^*(t-t)dt \end{cases} \quad (2)$$

式中  $f(x) = ax + bx^3$ 。权函数  $k(s)$  是定义在  $[0, +\infty)$  内的一个非负有界函数, 反映了过去的状态对当前的动力学性态的影响。这里考虑弱核, 即  $k(s) = me^{-ms}$ ,  $m > 0$ 。为了方便, 设

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^{+\infty} k(t)x_1^*(t-t)dt \\ x_2(t) = \int_0^{+\infty} k(t)x_2^*(t-t)dt \end{cases} \quad (3)$$

那么系统(2)等价于模型

$$\begin{cases} dx_1(t)/dt = \int_0^{+\infty} k(s)x_2(t-s)ds - \int_0^{+\infty} k(s)f[x_1(t-s)]ds \\ dx_2(t)/dt = -\int_0^{+\infty} k(s)x_1(t-s)ds \end{cases} \quad (4)$$

显然, 原点  $(0, 0)$  是方程(2)或(4)的一个平衡点。设  $x_3(t) = dx_1(t)/dt$ ,  $x_4(t) = dx_2(t)/dt$ , 那么

$$\begin{cases} dx_1/dt = x_3 \\ dx_2/dt = x_4 \\ dx_3/dt = mx_2 - mx_3 - mf(x_1) \\ dx_4/dt = -mx_1 - mx_4 \end{cases} \quad (5)$$

平均数延迟  $m$  作主要分岔参数, 引入状态反馈控制  $u = g(y; m)$ , 得到带非线性反馈的线性系统

$$\begin{cases} dx/dt = A(m)x + Bu \\ y = -Cx \\ u = g(y; m) \end{cases} \quad (6)$$

式中  $x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4)^T$ ,  $A(m) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & m & -m & 0 \\ -m & 0 & 0 & -m \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = (-1 \ 0 \ 0 \ 0)$ ,  $u = f(y)$ 。

然后对系统(6)作 Laplace 变换, 得到系统线性部分的传输矩阵

$$G(s; m) = C[sI - A(m)]^{-1}B = \frac{ms(m+s)}{[s^2(m+s)^2 + m^2]} \quad (7)$$

再将反馈系统在平衡点  $y = 0$  处线性化, 得到雅可比矩阵

$$J(m) = \frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{y=0} = f'(0) = a \quad (8)$$

设 
$$h(I, s; m) = \det |II - G(s; m)J(m)| = I - \frac{ams(m+s)}{s^2(m+s)^2 + m^2} = 0 \quad (9)$$

应用 Nyquist 稳定性准则, 取  $s = iw$ , 得到下面结果<sup>[8]</sup>:

引理1 如果在时域中非线性系统对应雅可比矩阵在  $m = m_0$  时有一对纯虚的特征值  $\pm iw_0$ , 那么在频域中的常数矩阵  $[G(iw_0; m_0)J(m_0)]$  有实特征值  $-1 + i0$ 。

令  $\hat{I} = \hat{I}(iw; m)$  是  $[G(iw; m)J(m)]$  的特征值, 且满足  $\hat{I}(iw_0; m_0) = -1 + i0$ , 那么

$$h(-1, iw_0; m_0) = -1 - \frac{iam_0w_0(m_0 + iw_0)}{-w_0^2(m_0 + iw_0)^2 + m_0^2} = 0 \quad (10)$$

可得:  $m_0 = \frac{4-a^2}{2a}$  且  $w_0 = \frac{4-a^2}{4}$ 。

定理1 Hopf 分岔存在性定理:

1) 如果  $0 < a < 2$ , 那么  $m_0 = (4-a^2)/2a$  是系统(2)的 Hopf 分岔点;

2) 如果  $a > 2$  或  $a = 0$ , 那么系统(2)的Hopf分岔点不存在。

### 3 分岔周期解的稳定性和分岔方向

为研究分岔周期解的稳定性, 首先定义一个辅助向量

$$x_1(\tilde{w}) = \frac{-w^T [G(i\tilde{w}; \tilde{m})] p_1}{w^T v} \quad (11)$$

式中  $\tilde{m}$  为参数  $m$  的一个定值,  $\tilde{w}$  为特征轨线  $\hat{I}$  与负实轴相交的最接近于  $(-1+i0)$  交点的频率,  $w^T$  和  $v$  分别是  $[G(iw; m)J(m)]$  对应于特征值  $\hat{I}(i\tilde{w}; \tilde{m})$  的左、右特征向量, 且

$$p_1 = \left[ D_2(V_{02} \otimes v + \frac{1}{2} \bar{v} \otimes V_{22}) + \frac{1}{8} D_3 v \otimes v \otimes \bar{v} \right] \quad (12)$$

式中  $V_{02} = -\frac{1}{4} [I + G(0; \tilde{m})J(\tilde{m})]^{-1} G(0; \tilde{m}) D_2 v \otimes \bar{v}$ ,  $V_{22} = -\frac{1}{4} [I + G(2i\tilde{w}; \tilde{m})J(\tilde{m})]^{-1} G(2i\tilde{w}; \tilde{m}) D_2 v \otimes v$ ,  $D_2 = \frac{\partial^2 g(y; \tilde{m})}{\partial y^2} \Big|_{y=0}$ ,  $D_3 = \frac{\partial^3 g(y; \tilde{m})}{\partial y^3} \Big|_{y=0}$ 。

根据式(7)和(8), 且  $\tilde{I}$  是  $[G(i\tilde{w}; \tilde{m})J(\tilde{m})]$  的特征值, 有

$$\tilde{I} - \frac{ia\tilde{m}w(\tilde{m}+i\tilde{w})}{-w^2(\tilde{m}+i\tilde{w})^2 + \tilde{m}^2} = 0 \quad (13)$$

那么  $D_2 = f''(0)$ ,  $D_3 = f'''(0)$ ,  $v = w = 1$

$$V_{02} = 0, \quad V_{22} = -\frac{\tilde{m} \cdot 2i\tilde{w}(\tilde{m} + 2i\tilde{w})f''(0)}{4[-4\tilde{w}^2(\tilde{m} + 2i\tilde{w})^2 + \tilde{m}^2 + a\tilde{m} \cdot 2i\tilde{w}(\tilde{m} + 2i\tilde{w})]} \quad (14)$$

可得

$$x_1(\tilde{w}) = \frac{2i\tilde{I}\tilde{m}\tilde{w}(\tilde{m} + 2i\tilde{w})[f''(0)]^2}{8a[-4\tilde{w}^2(\tilde{m} + 2i\tilde{w})^2 + \tilde{m}^2 + a\tilde{m} \cdot 2i\tilde{w}(\tilde{m} + 2i\tilde{w})]} - \frac{\tilde{I}f''(0)}{8a} \quad (15)$$

下面是建立在频域中的Hopf分岔定理<sup>[8]</sup>。

引理2 设特征轨线  $\hat{I}(s)$  与负实轴相交的最接近于  $(-1+i0)$  交点是  $\hat{I}(i\tilde{w})$ , 又设  $x_1(\tilde{w})$  不等于零, 从  $(-1+i0)$  出发沿  $x_1(\tilde{w})$  方向的射线记为  $L_1$ , 并且  $L_1$  与特征轨线  $\hat{I}(iw)$  的第一个交点是在  $\hat{I}(i\hat{w}) = \hat{P} = -1 + x_1(\tilde{w})q^2$  处, 其中  $q = O(|m - m_0|^{1/2})$ 。如果满足以下条件:

1) 特征轨线  $\hat{I}$  在临界值  $(w_0, m_0)$  处有非零的变化速度, 即

$$M(w_0, m_0) = \det \begin{bmatrix} \partial F_1 / \partial m & \partial F_2 / \partial m \\ \partial F_1 / \partial w & \partial F_2 / \partial w \end{bmatrix} \Big|_{(w, \hat{w})} \neq 0 \quad (16)$$

式中  $F_1(w; m) = \Re\{h(-1, iw; m)\}$ ,  $F_2(w; m) = \Im\{h(-1, iw; m)\}$ 。

2) 它们是横截相交的

$$N(\hat{w}, \tilde{m}) = \det \begin{bmatrix} \Re\{x_1(\hat{w})\} & \Im\{x_1(\hat{w})\} \\ \Re\left\{\frac{d\hat{I}}{dw}\right\}_{w=\hat{w}} & \Im\left\{\frac{d\hat{I}}{dw}\right\}_{w=\hat{w}} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (17)$$

3) 在半径  $d > 0$  的小邻域内,  $(-1+i0)$  到  $\hat{P}$  的连线之间没有其他交点。

那么由方程(6)给出的系统在频率  $w = \hat{w} + O(\hat{q}^4)$  时有周期解  $y(t)$ 。此外, 在交点  $\hat{P}$  附近给一个小扰动, 并利用Nyquist稳定性准则, 就可以确定周期解  $y(t)$  的稳定性。

根据引理2, 画出射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(iw)$  的图形, 能确定Hopf分岔方向和分岔周期解的稳定性。

1) 如果在  $\tilde{m} > m_0$  ( $< m_0$ ) 时射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(iw)$  第一次相交, 那么分岔周期解存在, 并且Hopf分岔是超临界的(亚临界的)。

2) 如果对于很小的正数  $\epsilon > 0$ , 特征轨线绕点  $P_1 = \hat{P} + \epsilon x_1(\tilde{w})$  逆时针旋转的总数等于  $I(s)$  有正实部极点的个数, 那么极限环是稳定的, 否则是不稳定的。

将分岔参数  $m$  从  $m_0$  作微小扰动到  $\tilde{m}$ , 并注意到  $\tilde{I} = \hat{I}(i\tilde{w}; \tilde{m})$  是一个实数, 根据方程(13), 可得

$$\begin{cases} 2\tilde{I}a\tilde{m} + 4\tilde{I}^2 - a^2 = 0 \\ \tilde{w}^2 = -\frac{1}{2\tilde{I}}a\tilde{m} \end{cases} \quad (18)$$

定理2 设

$$s = \operatorname{sgn} \left( \left. \frac{d\tilde{I}}{dm} \right|_{m=m_0} \cdot \Im \left\{ \left. \frac{d\hat{I}}{dw} \right|_{w=w_0} \right\} \right) \cdot N(w_0, m_0) \quad (19)$$

如果  $s > 0$  ( $s < 0$ ), 那么系统(2)在  $m = m_0$  时的Hopf分岔点是超临界的(亚临界的)。

方程(18)中用  $m$  替换  $\tilde{m}$ , 并在两边关于  $m$  求导, 再取  $m = m_0, \tilde{I} = -1$ , 根据定理1, 可得

$$\left. \frac{d\tilde{I}}{dm} \right|_{m=m_0} = \frac{-2a}{a^2 + 4} \quad (20)$$

设  $f(u) = au + bu^3$ , 有  $f'(0) = a, f''(0) = 0, f'''(0) = 6b$ , 于是在方程(15)中可得

$$x_1(w) = -\frac{6b\tilde{I}}{8a} \quad (21)$$

由于  $x_1(w_0) = 3b/4a$  是实数, 即  $\Re\{x_1(w_0)\} = 3b/4a, \Im\{x_1(w_0)\} = 0$ , 如果  $0 < a < 2$ , 有

$$\operatorname{sgn}(s) = -\operatorname{sgn}(b) \quad (22)$$

推论1 设  $f(u) = au + bu^3, 0 < a < 2$ 。如果  $b < 0$  ( $b > 0$ ), 那么系统(2)在  $m = m_0$  时的Hopf分岔是超临界的(亚临界的)。

画出从  $(-1+i0)$  出发的射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(iw)$  的图形, 对于很小的正数  $\epsilon > 0$ , 确定特征轨线绕点  $P_1 = \hat{P} + \epsilon x_1(\tilde{w})$  逆时针旋转的总数  $k$ 。根据方程(9), 有

$$I(s) = \frac{ams(m+s)}{s^2(m+s)^2 + m^2} \quad (23)$$

$s^2(s+m)^2 + m^2 = 0$  的根是  $I(s)$  的极点。据Routh-Hurwitz准则,  $I(s)$  有正实部极点的个数等于2。

推论2 对于很小的正数  $\epsilon > 0$ , 设  $k$  是特征轨线绕点  $P_1 = \hat{P} + \epsilon x_1(\tilde{w})$  逆时针旋转的总数, 其中  $\hat{P}$  是射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(iw)$  的交点。如果  $k = 2$  ( $k \neq 2$ ), 那么系统(2)的分岔周期解是稳定的(不稳定的)。

### 4 数字仿真例子

讨论系统(2)在弱核条件下的数字例子。由推论1知,  $b$  决定Hopf分岔方向。如果  $b < 0$ , Hopf分岔点  $m_0$  是超临界的; 如果  $b > 0$ , Hopf分岔点  $m_0$  是亚临界的。在对应的频域图中画出射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(iw)$ , 如果它们相交, 则存在极限环, 否则极限环就不存在。设射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(iw)$  相交, 由推论2知, 对于很小的正数  $\epsilon > 0$ , 特征轨线绕点  $P_1 = \hat{P} + \epsilon x_1(\tilde{w})$  逆时针环绕的总数是  $k$ 。如果  $k = 2$ , 分岔周期解是稳定的; 如果  $k \neq 2$ , 分岔周期解是不稳定的。

例 令  $a=1, b=3$ , 则  $m_0 = 1.5$  是Hopf分岔点。由于  $b=3 > 0$ , 则  $m_0 = 1.5$  是亚临界的Hopf分岔点。当  $a=1, b=3, m=1.4$  时, 如图1所示, 当  $a=1, b=3, m=1.6$  时, 如图2所示。

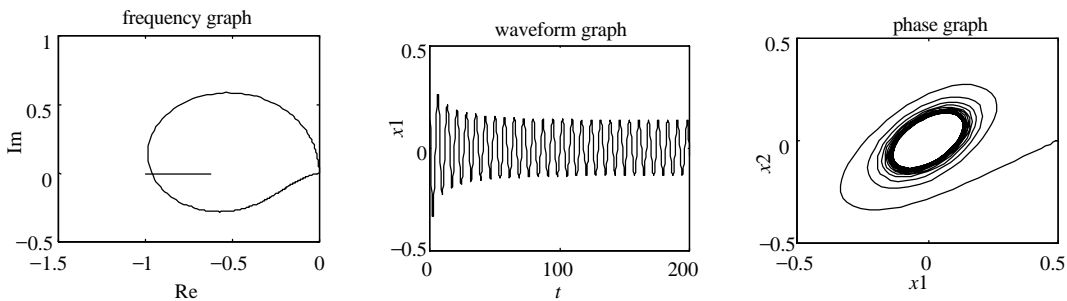


图1 射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(iw)$  相交, 且  $k = 2$ , 存在一个稳定的周期解

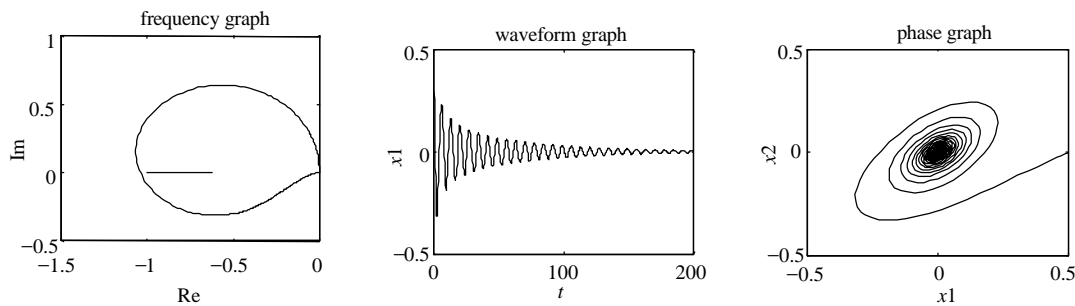


图2 射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(i\omega)$  不相交, 不存在周期解

## 5 结 论

带时延的范台坡方程具有丰富的动力学行为。利用非线性动力学系统的观点, 分析理论和实践的问题是很有价值的。本文以平均时延为分岔参数, 表明了当参数经过一个临界值时发生了Hopf分岔, 即一族周期解从平衡点处分岔。在分岔点附近画出射线  $L_1$  和特征轨线  $\hat{I}(i\omega)$  的图形, 分析Hopf分岔方向和分岔周期解的稳定性。用参数  $s$  或  $b$  就可确定Hopf分岔方向: 如果  $0 < a < 2$ , 那么存在Hopf分岔点。

本文分析的是带弱核分布式时延的系统。对于强核时延系统, 即  $k(s) = m^2 s e^{-ms}$ ,  $m > 0$ , 其动力学行为将更加复杂, 我们将在另一篇文章中加以分析。

## 参 考 文 献

- [1] Liao X F, Wong K W, Wu Z F. Hopf bifurcation and stability of periodic solutions for van der Pol equation with distributed delay[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2001, 26: 23-44
- [2] Venkata S, Vaithianathan K P. Singularity induced bifurcation and the van der Pol oscillator[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1994, 41: 765-769
- [3] Murakami K. Bifurcated periodic solutions for delayed van der Pol equation[J]. *Neural, Parallel & Scientific Computations*, 1999, 7: 1-16
- [4] Guckenheimer J, Holmes P J. *Nonlinear oscillations, dynamical system, and bifurcations of vector fields*[C]. Springer-Verlag, Berlin, 1983
- [5] Hassard B D, Kazarinoff N D, Wan Y H. *Theory and applications of hopf bifurcation*[M]. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1981
- [6] Allwright D J. Harmonic balance and the Hopf bifurcation theorem[J]. *Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc.*, 1977, 82: 453-467
- [7] Mees A I, Chua L O. The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems[J]. *IEEE Trans. Circ. Sys.*, 1979, 26: 235-254
- [8] Moiola J L, Chen G. *Hopf bifurcation analysis: a frequency domain approach*[C]. World Scientific, Singapore, 1996
- [9] Moiola J L, Chen G. Computation of limit cycles via higher-order harmonic balance approximation[J]. *IEEE Trans. Auto. Contr.*, 1993, 38: 782-790
- [10] Moiola J L, Chen G. Frequency domain approach to computational analysis of bifurcations and limit cycles: a tutorial[J]. *Int. J. of Bifur. Chaos.*, 1993, 3: 843-867

编辑 漆 蓉