第 33 卷　第 2 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.33　No.2
2004 年 4 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Apr. 2004

非奇块H矩阵的充分条件

杨　鹏，冉瑞生，黄廷祝

(电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】引入了一类块对角占优矩阵的概念，在原有点H矩阵判定的基础上，应用分块技术，通过构造性证明对块对角占优矩阵进行了讨论，给出了非奇块H矩阵的一个简捷实用判据，推广了相应文献的结果，进一步补充和完善块对角占优矩阵的理论。

关　键　词　块对角占优矩阵；块H矩阵；非零元素链；　范数

中图分类号　O151.26　　　　文献标识码　A

A Sufficient Conditions for Nonsingular Block H-Matrices

Yang Peng，Ran Ruisheng，Huang Tingzhu

(School of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　First, we introduce the concept of a kind of block diagonally dominant matrices, and then on the basis of original pointwise $\boldsymbol{H}$-matrices, we discuss block diagonally dominant matrices by using block matrix technology and certifying structurally. Finally, two simple criteria for nonsingular block $\boldsymbol{H}$-matrices are given entirely. Result obtained improves results in the known corresponding references.

Key words　block diagonally dominant matrix;　block $\boldsymbol{H}$-matrix;　nonzero elements chain;　norm

1　注记

$\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ 的分块为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{21} & \cdots & A_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{A}_{ii}$ 为 $\boldsymbol{r}_i$ 阶方阵，$1\le i\le k$，　且 $\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{n}$。

记$K=\{1,2,3,\cdots,k\}$，　$L_i=\sum_{\substack{j\in K\\ j\ne i}}\|\boldsymbol{A}_{ij}\|$，矩阵范数取与向量范数相容的矩阵范数。设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ 形如式(1)分块，且 $\boldsymbol{A}_{ii}$ 是非奇的，$1\le i\le k$，若 $\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1}\ge L_i$，则称$A$为块对角占优矩阵[1]，记为 $\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{G}_0$。若上式中的不等号均为严格的，则称$A$为严格块对角占优矩阵[1]，记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{G}$。若存在一个$n$阶正对角矩阵 $\boldsymbol{D}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AD}$ 为严格块对角占优矩阵，则称A为块H矩阵[2]，记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{G}^*$。

设 $\boldsymbol{Z}^{n\times n}=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{R}^{n\times n}\}$，$a_{ij}\le 0,\ i\ne j$，若 $\boldsymbol{A}^{-1}\ge 0$，则称A为非奇异M 矩阵[3]，记为 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{M}$。

收稿日期：2002－12－05
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60372012)
作者简介：杨　鹏(1979－)，男，硕士生，主要从事大规模科学计算的数值计算方面的研究.

设 $M(A)=(M_{ij})\in R^{n\times n}$，$M_{ii}=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}, M_{ij}=-\|A_{ij}\|$，$j\neq i$，$i$、$j\in K=\{1,2,\cdots,n\}$，则称 $M(A)$ 为A的比较阵。

若 $\tilde{A}=(\|A_{ij}\|)_{n\times n}$ 为不可约矩阵，又 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geq L_i$ 中至少有一个严格不等号成立，则称A为不可约块对角占优矩阵。若 $\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geq L_i$，$i\in K$，$J=\{i\,\big|\,\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geq L_i, i\in K\}\neq\emptyset$，且对任何$i\in K-J$，有$A$之非零元素链 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_rj}$，其中 $i\neq i_1, i_1\neq i_2,\cdots,i_r\neq j$，使得 $j\in J$，则称A为具非零元素链对角占优矩阵。

文献[1～7]对块H矩阵已进行了研究，下面给出有关块H矩阵的简捷判据及文献[3]的相应结果。

2　主要结果

下面给出A为非奇块H矩阵时的简捷实用判据。

定理1　设 $W=\{i\,|\,\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}\geq L_i=\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|, i\in K\}\neq\emptyset$，$K_1\cap K_2=\emptyset$，$K_1\cup K_2=K$，$A_2=(M_{ij})$，$i$、$j\in K_2$，$A_2$是一个非奇异$M$矩阵，且$(P_2)_i=-\sum_{j\in K_1}|M_{ij}|$是$P_2$的向量，$i\in K_2$。对于任何$i\in K_1$，$j\in K_2$ (当 $b=0, i\in K, (\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a)/b_i=+\infty$)，其中 $a_i=\sum_{\substack{j\in K_1\\ j\neq i}}\|A_{ij}\|$，$b_i=\sum_{\substack{j\in K_2\\ j\neq i}}\|A_{ij}\|$，若

$$\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}\geq (A_2^{-1}P_2)_j>0 \tag{2}$$

则A为块对角占优矩阵。

证明　设d满足

$$\min_{i\in K_1}\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}\geq d\geq \max_{j\in K_2}(A_2^{-1}P_2)_j$$

构造正对角块矩阵 $\tilde{D}_1=\mathrm{diag}\{D_1I_{n_1},\cdots,D_kI_{n_k}\}$，$1\leq i\leq k$，其中 $D_i=d$，$i\in K_2$；$D_i=1$，$i\in K_1$，$B=A\tilde{D}_1=(A_{ij}^{(1)})$。当$i\in K_1$时，有

$$\|A_{ii}^{(1)-1}\|^{-1}-L_i^{(1)}=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i-db_i\geq\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i-\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}b_i=0$$

设 $B_2=A_2\tilde{D}_1$，当$i\in K_2$时，有

$$(B_2^{-1}P_2)_i=(d^{-1}A_2^{-1}P_2)_i\leq\frac{(A_2^{-1}P_2)_i}{\max\limits_{j\in K_2}(A_2^{-1}P_2)_i}\leq 1$$

设 $B_2^{-1}P_2=X\leq e=(1,1,\cdots,1)^T$，构造 $\tilde{D}_2=\mathrm{diag}\{D_1I_{n_1},\cdots,D_kI_{n_k}\}$，$1\leq i\leq k$，其中 $D_i=x_i$，$i\in K_2$；$D_i=1$，$i\in K_1$，$C=B\tilde{D}_2=(A_{ij}^{(2)})$。

当$i\in K_1$时，有

$$\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}=\|A_{ii}^{(1)-1}\|^{-1}-a_i^{(1)}-x_ib_i^{(1)}\geq\|A_{ii}^{(1)-1}\|^{-1}-L_i^{(1)}\geq 0\text{；}$$

当$i\in K_2$时，$(P_2)_i=-\sum_{j\in K_1}|M_{ij}|=-\sum_{j\in K_1}-\|A_{ij}\|=a_i^{(1)}$，$i\neq j$有

$$\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}=\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-b_i^{(2)}-a_i^{(2)}=(B_2X)_i-a_i^{(1)}=(P_2)_i-a_i^{(1)}=0$$

于是，$C=A\tilde{D}_1\tilde{D}_2=AD$满足 $\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}\geq 0$，$i\in K$。所以$A$是一个块对角占优矩阵。将定理1的结论进一步推广，可得

定理2　设 $W=\{i\,\big|\,\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}>L_i=\sum_{j\neq i}\|A_{ij}\|, i\in K\}\neq\emptyset$，$K_1\cap K_2=\emptyset$，$K_1\cup K_2=K$，$A_2=(M_{ij})$，$i$、$j\in K_2$，$A_2$是一个非奇异$M$矩阵，且$(P_2)_i=-\sum_{j\in K_1}|M_{ij}|$是$P_2$的向量，$i\in K_2$，其中 $a_i=\sum_{\substack{j\in K_1\\ j\neq i}}\|A_{ij}\|$，$b_i=\sum_{\substack{j\in K_2\\ j\neq i}}\|A_{ij}\|$，若式(2)的每个不等号都是严格的，或者

$$J=\left\{i\,\middle|\,\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}>\max_{j\in K_2}(A_2^{-1}P_2)_j,\ i\in K_1\right\}\neq\emptyset \tag{3}$$

对于任何 $i\in K-J$，有 $A_{ii_1}A_{i_1i_2}\cdots A_{i_rq}\neq 0$，存在 $q\in J$，则A为非奇块H矩阵。

证明 由式(3)，对任何 $i\in K_1$，$j\in K_2$，有 $\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}\geq (A_2^{-1}P_2)_j$。不妨设$d$满足

$$\min_{i\in K_1}\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}>d>\max_{j\in K_2}(A_2^{-1}P_2)_j$$

构造正对角矩阵 $\tilde{D}_1=\mathrm{diag}\{D_1I_{n_1},\cdots,D_kI_{n_k}\}$，$1\le i\le k$，其中 $D_i=d$，$i\in K_2$；$D_i=1$，$i\in K_1$，$B=A\tilde{D}_1=(A_{ij}^{(1)})$。当 $i\in K_1$ 时，有

$$\|A_{ii}^{(1)-1}\|^{-1}-L_i^{(1)}=\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i-db_i\geq\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i-\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}b_i=0$$

设 $B_2=A_2\tilde{D}_1$，当 $i\in K_2$ 时，有

$$(B_2^{-1}P_2)_i=(d^{-1}A_2^{-1}P_2)_i<\frac{(A_2^{-1}P_2)_i}{\max_{i\in K_2}(A_2^{-1}P_2)_i}\le 1$$

设 $B_2^{-1}P_2=X>0$，且 $y=B_2^{-1}(P_2+d)<e$，$d>0$。再构造正对角矩阵 $\tilde{D}_2=\mathrm{diag}\{D_1I_{n_1},\cdots,D_kI_{n_k}\}$，$1\le i\le k$，其中 $D_i=y_i$，$i\in K_2$；$D_i=1$，$i\in K_1$，$C=B\tilde{D}_2=(A_{ij}^{(2)})$。

当 $i\in K_1$ 时，有

$$\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}=\|A_{ii}^{(1)-1}\|^{-1}-a_i^{(1)}-y_ib_i^{(1)}\geq\|A_{ii}^{(1)-1}\|^{-1}-L_i^{(1)}>0$$

当 $i\in K_2$ 时，$(P_2)_i=-\sum_{j\in K_1}|M_{ij}|=-\sum_{j\in K_1}-\|A_{ij}\|=a_i^{(1)}$，$i\neq j$ 有

$$\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}=(\|A_{ii}^{(1)-1}\|^{-1}-b_i^{(1)})d-a_i^{(1)}=(B_2y)_i-a_i^{(1)}>(P_2)_i-a_i^{(1)}=0$$

则 $C=A\tilde{D}_1\tilde{D}_2=AD$，满足 $\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}>0$，$i\in K$。所以$A$为非奇块$H$矩阵。

当

$$J=\left\{i\left|\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}>\max_{j\in K_2}(A_2^{-1}P_2)_j,\ i\in K_1\right.\right\}\neq\Phi$$

正如以上证明，可得 $C=A\tilde{D}_1\tilde{D}_2=(A_{ii}^{(2)})$。且满足

$$\|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}>0,\ i\in J;\ \|A_{ii}^{(2)-1}\|^{-1}-L_i^{(2)}\geq 0,\ i\in K-J,$$

且对任何 $i\in K-J$，存在一个非零元素链 $A_{ii_1}A_{i_1i_2}\cdots A_{i_rq}\neq 0$，使得 $q\in J$，所以C是一个非零元素链块对角占优矩阵。从文献[4]中的定理4可知A为非奇块H矩阵。

注：当 $r_i=1$ 时，即是文献[3]中的结果，而文献[3]中的定理是此处定理的特例。

由定理1的证明可得对于不可约对角占优矩阵肯定也是非零链元素对角占优矩阵。

推论1 若 $W\neq\Phi$，$J\neq\Phi$，$\tilde{A}=(\|A_{ij}\|)_{n\times n}$ 是不可约矩阵，且式(2)的每个不等号都是严格的，则A为非奇块H矩阵。

推论2 设 $W\neq\Phi$，

1) 若有 K_1,K_2 不相交，$K_1\cup K_2=K$，对于任何 $i\in K_1$，$i\in K_2$，a为一常数存在

$$(\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}d_i)>a\ (\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-b_j)>0,\ (\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i)(\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-b_j)\geq a_jb_i, \tag{4}$$

则A是块对角占优矩阵。

2) 若式(4)的每个不等号都是严格的，或 $\tilde{A}=(\|A_{ij}\|)_{n\times n}$ 不可约且式(4)至少有一个严格不等号成立，则A为非奇块H矩阵。

证明 由式(4)对任何 $i\in K_1$，$j\in K_2$，$\min_{i\in K_1}\frac{\|A_{ii}^{-1}\|^{-1}-a_i}{b_i}\geq\max_{j\in K_2}\frac{a_j}{\|A_{jj}^{-1}\|^{-1}-b_j}\geq 0$

设 $A_2X=P_2$，$x_r=\|X\|_\infty$，那么

$$X=(A_2^{-1}P_2)$$

由上式，得

$$\sum_{j\in K_2}M_{rj}x_j=(P_2)_r=a_r\geq x_r\sum_{j\in K_2}M_{rj},$$

$$(\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{P}_2)_i \le x_r \le \frac{a_r}{\sum\limits_{j\in K_2} \boldsymbol{M}_{rj}} = \frac{a_r}{\|\boldsymbol{A}_{rr}^{-1}\|^{-1} - b_r} \le \max_{j\in K_2}\frac{a_j}{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - b_j}$$

所以对于任何 $i \in K_1$， $j \in K_2$，有

$$\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - a_i}{b_i} \ge (\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{P}_2)_j$$

由定理1，易知A是一个块对角占优矩阵。　　　　证毕

2) 当式(4)的每个不等号都是严格的，由式(1)的证明得

$$(\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{P}_2)_j \le x_r \le \max_{j\in K_2}\frac{a_j}{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - b_j} < \min_{i\in K_1}\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - a_i}{b_i}$$

由定理1可知A为块H矩阵。当 $\widetilde{A} = (\| A_{ij} \|)_{n\times n}$ 是不可约且使得式(4)至少有一个严格不等号成立时，正如推论2中1)的证明得

$$(\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{P}_2)_j \le x_r \le \max_{j\in K_2}\frac{a_j}{\|\boldsymbol{A}_{jj}^{-1}\|^{-1} - b_j} \le \min_{i\in K_1}\frac{\|\boldsymbol{A}_{ii}^{-1}\|^{-1} - a_i}{b_i}$$

且至少有一个严格不等号成立。由推论1，可知A为非奇块H矩阵。　　　　证毕

3 结 束 语

块H矩阵在数学、物理、数值分析等学科中应用较广泛，如数学物理问题中的方程组求解，特别是方程组迭代算法的收敛性分析、并行迭代算法的收敛性分析等研究中具有重要作用。以上结果给出了新的块H矩阵的判别条件，该条件对矩阵的正稳定性判定等方面有着广泛应用。

参 考 文 献

[1] Feingold D G, Varga R S. Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem[J]. Pacific.J.Math, 1962, (4): 1 241-1 250

[2] 游兆永. 非奇M矩阵[M]. 武汉: 华中工学院出版社, 1981

[3] Gao Yiming, Wang Xiaohui. Criteria of the generalized diagonally donminant matrices and M-matrices Ⅱ[J]. Linear. Algebra. Appl, 1996, (248): 339-353

[4] Pang M X, Mao G P. Generalizations of diagonal dominance for matrices and its application[J]. J. of Math. Research Exposition, 1991,11(4):507-509

[5] Gao Yiming, Wang Xiaohui. Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices[J]. Linear. Algebra. Appl, 1992, (169): 257-268

[6] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative mateices in the mathematical sciences[M]. New York: SIAM Press, 1994

[7] 高中喜，黄廷祝. 块H矩阵的刻画[J]. 电子科技大学学报, 2002,31(3): 316-319

编　辑　刘文珍