广义对角占优矩阵的充分条件

高　建，黄廷祝
(电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】根据不可约对角占优、具非零元素链对角占优与广义对角占优矩阵等概念,利用比较矩阵,研究了广义对角占优矩阵的判定, 用简捷的方法,给出了新的判定定理。推广了相应文献的结果,进一步补充和完善了对角占优矩阵的理论。

关　键　词　非奇H矩阵;　对角占优矩阵;　非零元素链;　不可约
中图分类号　O151.26;　O241.6　　　　文献标识码　A

Sufficient Conditions of Generalized Diagonally Dominant Matrices

Gao Jian，Huang Tingzhu
(School of Applied Mathematics, UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　According to irreducible diagonal dominance, nonzero chains-type diagonal dominance and generalized diagonal dominance etc. By use of the concept of comparison matrix, criteria for generalized diagonally dominant matrices are investigated. New criteria are presented. Some results in literature are generalized.

Key words　nonsingular ***H***-matrix;　diagonal dominance matrix;　nonzero elements chain; irreducible matrix

1　注记

记 $\grave{I}_n(C)$ 为 n 阶复矩阵的集合，对 $\forall \boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ ，记 $N=\{1,2,\cdots,n\}$，$\ddot{\boldsymbol{E}}_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$S_i(\boldsymbol{A})=\sum\limits_{j\neq i}|a_{ji}|, i\in N$；$N_1=\{i\in N|2|a_{ii}|\leq \ddot{\boldsymbol{E}}_i(\boldsymbol{A})+S_i(\boldsymbol{A})\}$，$N_2=\{i\in N|\quad 2|a_{ii}|>\ddot{\boldsymbol{E}}_i(\boldsymbol{A})+S_i(\boldsymbol{A})\}$，$N=N_1+N_2$。

又记 $a_i=\sum\limits_{\substack{j\in N_1\\ j\neq i}}(|a_{ij}|+|a_{ji}|)$，$\overline{a}_i=\sum\limits_{j\in N_2}(|a_{ij}|+|a_{ji}|)$，$\forall i\in N_1$；$b_i=\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}(|a_{ij}|+|a_{ji}|)$，$\overline{b}_i=$ ，$\sum\limits_{j\in N_2}(|a_{ij}|+|a_{ji}|)$ $\forall i\in N_2$；$r=\max\limits_{i\in N_1}\overline{a}_i/2|a_{ii}|-a_i$。$A$的比较矩阵记为 $\boldsymbol{M}(A)=(m_{ij})$，其中

$$m_{ii}=|a_{ii}|,\ m_{ij}=-|a_{ij}|,\ i, j\in N,\ i\neq j$$

定义1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，若 $\forall i\in N$，有 $|a_{ii}|>\ddot{\boldsymbol{E}}_i$，则称 A 为严格对角占优矩阵，记为 $A\in D$。若存在正对角阵 X，使 AX 为严格对角占优矩阵，则称 A 为广义严格对角占优矩阵(即非奇H矩阵)，记作 $A\in D^*$。

2　主要结果

引理1[1]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}(A)+\boldsymbol{M}^T(A)$，(其中 $\boldsymbol{M}^T(A)$ 表示 $\boldsymbol{M}(A)$ 的转置)，若 $\boldsymbol{B}\in D^*$，则 $\boldsymbol{A}\in D^*$。

收稿日期：2003-07-09
作者简介：高　建(1965—)，女，讲师，主要从事矩阵代数、数值计算方面的研究.

定理1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ ， $N_2\neq f$ ，若 $\forall i\in N_2$ ，有

$$\left|a_{ii}\right|>\frac{1}{2}(b_i+\bar{b}_i r) \tag{1}$$

则 $\boldsymbol{A}\in D^*$ 。

证明　记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{M}^T(\boldsymbol{A})=(b_{ij})_{n\times n}$ ，则有

$$N_1=\{i\in N\big|\left|b_{ii}\right|\leq \sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|\}\text{，}\quad N_2=\{i\in N\big|\left|b_{ii}\right|>\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|\}\,.$$

$\forall i\in N_2$ ，由式(1)得

$$\left|b_{ii}\right|>\sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|+\sum_{j\in N_1}\left|b_{ij}\right|r$$

构造正对角阵 $\boldsymbol{X}=diag(x_i)$ ，

$$x_i=\begin{cases} r+e, & i\in N_1\\ 1, & i\in N_2\end{cases}$$

式中　$e>0$ ，且对 $\forall i\in N_2$ ，满足 $\left|b_{ii}\right|>\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|+\sum\limits_{j\in N_1}\left|b_{ij}\right|(r+e)$ 。令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BX}$ ，当 $i\in N_2$ 时，有 $\left|c_{ii}\right|=\left|b_{ii}\right|$ ，且

$$\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}\right|=\sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|+\sum_{j\in N_1}\left|b_{ij}\right|(r+e)<\left|b_{ii}\right|=\left|c_{ii}\right|$$

当 $i\in N_1$ 时，有 $\left|c_{ii}\right|=(r+e)\left|b_{ii}\right|$ ，且

$$\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}\right|=\sum_{\substack{j\in N_1\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|(r+e)+\sum_{j\in N_2}\left|b_{ij}\right|$$

因为 $e>0$ ，由 r 的定义得知

$$r+e>\frac{\sum\limits_{j\in N_2}\left|b_{ij}\right|}{\left|b_{ii}\right|-\sum\limits_{\substack{j\in N_1\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|}\,,$$

所以

$$\sum_{j\neq i}\left|c_{ij}\right|=\sum_{\substack{j\in N_1\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|(r+e)+\sum_{j\in N_2}\left|b_{ij}\right|<(r+e)\left|b_{ii}\right|=\left|c_{ii}\right|.$$

综上所述，知 $\boldsymbol{C}\in D$ ，故 $\boldsymbol{B}\in D^*$ ，由引理1知 $\boldsymbol{A}\in D^*$ 。　　　　证毕

引理2[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ ， $\forall i\in N$ 有 $\left|a_{ii}\right|\geq \ddot{E}_i(\boldsymbol{A})$ ，则 $A\in D^*$ 的充要条件是 $J=\{i\in N\ \big\|a_{ii}\big|>\ddot{E}_i(\boldsymbol{A})\}\neq f$ ，且对 $\forall i\in N\setminus J$ 有 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_t j}\neq 0$ ，使 $j\in J$ 。

定理2　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$ ， $N_2\neq f$ ，若 $\forall i\in N_2$ ，有

$$\left|a_{ii}\right|\geq\frac{1}{2}(b_i+\bar{b}_i r)\,, \tag{2}$$

且 $J_1=\{i\in N_2\big|\left|a_{ii}\right|>\frac{1}{2}(b_i+\bar{b}_i r)\}\neq f$ ， $J_2=\{i\in N_1\big|r=\frac{\bar{a}_i}{2\left|a_{ii}\right|-a_i}\}$ ，若 $\forall i\in N_2\setminus J_1$ 或 $\forall i\in J_2$ 有 $a_{ii_1}a_{i_1i_2}\cdots a_{i_t j}\neq 0$ ，使 $j\in J_1$ ，则 $\boldsymbol{A}\in D^*$ 。

证　记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{M}^T(\boldsymbol{A})=(b_{ij})_{n\times n}$ ，则有

$$N_1=\{i\in N\big|\left|b_{ii}\right|\leq \sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|\}\text{，}\quad N_2=\{i\in N\big|\left|b_{ii}\right|>\sum_{j\neq i}\left|b_{ij}\right|\}$$

$\forall i\in N_2$ ，由式(2)得

$$\left|b_{ii}\right|\geq\sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|+\sum_{j\in N_1}\left|b_{ij}\right|r\,,$$

且 $J_1=\left\{i\in N_2\big|\left|a_{ii}\right|>\frac{1}{2}(b_i+\bar{b}_i r)\right\}=\left\{i\in N_2\big|\left|b_{ii}\right|>\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}\left|b_{ij}\right|+\sum\limits_{j\in N_1}\left|b_{ij}\right|r\right\}\neq f$.

构造正对角阵 $\boldsymbol{X}=diag(x_i)$,

$$x_i = \begin{cases} r, & i \in N_1 \\ 1, & i \in N_2 \end{cases}$$

令$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BX}$，则当$i \in N_2$时，有$|c_{ii}| = |b_{ii}|$，且

$$\sum_{j \neq i} |c_{ij}| = \sum_{\substack{j \in N_2 \\ j \neq i}} |b_{ij}| + \sum_{j \in N_1} |b_{ij}| r \leq |b_{ii}| = |c_{ii}|,$$

$J_1 = \{i \in N_2 \,\big|\, |c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}|\} \neq f$．因为对$\forall i \in N_2 \setminus J_1$，有$a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_t j} \neq 0$，使$j \in J_1$，所以$\forall i \in N_2 \setminus J_1$，有$b_{ii_1} b_{i_1 i_2} \cdots b_{i_t j} \neq 0$，使$j \in J_1$。又因为$\boldsymbol{B}$右乘$\boldsymbol{X}$不改变其元素的非零性，故$\forall i \in N_2 \setminus J_1$，有$c_{ii_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_t j} \neq 0$，使$j \in J_1$。

当$i \in N_1$时，有$|c_{ii}| = r|b_{ii}|$，且

$$\sum_{j \neq i} |c_{ij}| = \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |b_{ij}| r + \sum_{j \in N_2} |b_{ij}|,$$

当$i \in N_1 \setminus J_2$时，有$r > \dfrac{\sum_{j \in N_2} |b_{ij}|}{|b_{ii}| - \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |b_{ij}|}$，故

$$|c_{ii}| = |b_{ii}| r > \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |b_{ij}| r + \sum_{j \in N_2} |b_{ij}| = \sum_{j \neq i} |c_{ij}|.$$

当$i \in J_2$时，有$r = \dfrac{\sum_{j \in N_2} |b_{ij}|}{|b_{ii}| - \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |b_{ij}|}$，则

$$|c_{ii}| = |b_{ii}| r = \sum_{\substack{j \in N_1 \\ j \neq i}} |b_{ij}| r + \sum_{j \in N_2} |b_{ij}| = \sum_{j \neq i} |c_{ij}|,$$

因为对$\forall i \in J_2$，有$a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_t j} \neq 0$，使$j \in J_1$，所以$\forall i \in J_2$，有$b_{ii_1} b_{i_1 i_2} \cdots b_{i_t j} \neq 0$，使$j \in J_1$。 又因为$\boldsymbol{B}$右乘$\boldsymbol{X}$不改变其元素的非零性，故$\forall i \in J_2$，有$c_{ii_1} c_{i_1 i_2} \cdots c_{i_t j} \neq 0$，使$j \in J_1$。

综上所述$\boldsymbol{C}$满足引理2的条件，所以$\boldsymbol{C} \in D^*$，故$\boldsymbol{B} \in D^*$，由引理1知$\boldsymbol{A} \in D^*$。 证毕

定理 3 设$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \in \boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{C})$且不可约，$N_2 \neq f$，若$\forall i \in N_2$，有

$$|a_{ii}| \geq \frac{1}{2}(b_i + \bar{b}_i r),$$

且$J_1 = \{i \in N_2 \,\big|\, |a_{ii}| > \frac{1}{2}(b_i + \bar{b}_i r)\} \neq f$，则$\boldsymbol{A} \in D^*$。

证明 构造正对角阵$\boldsymbol{X} = diag(x_i)$，

$$x_i = \begin{cases} r, & i \in N_1 \\ 1, & i \in N_2 \end{cases}$$

令$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BX}$，同定理2之证明，有$|c_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |c_{ij}|$，且$J_1 = \{i \in N_2 \,\big|\, |c_{ii}| > \sum_{j \neq i} |c_{ij}|\} \neq f$．因为$\boldsymbol{A}$不可约，所以$\boldsymbol{B}$不可约，从而可知$\boldsymbol{C}$不可约，由文献[3]得知$\boldsymbol{C} \in D^*$，故$\boldsymbol{A} \in D^*$。 证毕

参 考 文 献

[1] 孙玉祥，李宝贵．非奇异*H*矩阵的充分条件[J]．北华大学学报, 2002, 3(3): 196-198

[2] Neumann M. A Note on Generalization of Strict Diagonal Dominance for Real Matrices [J]. Lin. Alg. Appl., 1979, 26: 3-14

[3] Varga R. S. On recurring theorems on diagonal dominance[J]. Lin. Alg. Appl.. 1976, 13: 1-9

编 辑 刘文珍