第 33 卷　第 2 期　　　　电 子 科 技 大 学 学 报　　　　Vol.33　No.2
2004 年 4 月　　　　Journal of UEST of China　　　　Apr. 2004

B值同分布鞅随机列矩完全收敛性的注记

赵　武，陈良均

(电子科技大学应用数学学院　成都　610054)

【摘要】讨论了B值同分布鞅随机变量的矩完全收敛性，在一定矩条件下，利用切尾法和下鞅的极大值不等式等分析技巧，得到了同分布鞅随机变量的矩完全收敛性，将Chow实值独立同分布随机变量的矩完全收敛的结果在B值鞅的情况下进一步推广，在补充了B值鞅随机变量收敛的条件下，得到了平方矩存在的条件与同分布一样的结果。

关　键　词　B值鞅；　随机变量和；　矩完全收敛性；　独立随机变量

中图分类号　O152.4　　　　**文献标识码**　A

A Note on Moment Convergences for Martingale Random Variables on Banach Spaces

Zhao Wu，Chen Liangjun

(School of Applied Math., UEST of China　Chengdu　610054)

Abstract　In this paper, the moment complete convergence for martingale random variables is discussed. Under certain moment condition, based on inequality of sup martingale and other relevant analytical methods, the moment complete convergence for B-valued martingale random variables is obtained, Satisfactory results are obtained.

Key words　martingale in banach;　sums of random variables;　moment complete convergence; i.i.d random variables

记　$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$，**其中**$\{X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots\}$**为实值**i.i.d.**随机变量列，文献**[1]**证明了如果**$a>\frac{1}{2}$，$pa>1$，**且**$E|X_1|^p<\infty$，**则**$\sum_{n=1}^{\infty} n^{pa-2} p\{|S_n|>n\}<\infty$，**文献**[2]**讨论了实值独立随机变量列部分和的完全收敛性，而对**B**值独立同分布随机变元部分和的完全收敛性，文献**[3,4]**则得到了其相应的结论。本文就** $pa>1$, $1<p<2$，$p\geq q\geq 1$**的情况进一步证明**B**值同分布鞅随机变元列部分和的矩完全收敛性。**

1　定 义

设Banach**空间是实可分空间，**$\{X_n\}$**是定义于同一概率空间上的**B**值随机变元列。称**Banach**空间是**p**阶光滑空间**($1\leq p\leq 2$)，**若存在常数**$C=C_p>0$，**使得对每一**B**值鞅随机变元列**$\{X_n\}$，$S_n=\sum_{j=1}^{n} X_j$ **且** $E\|X_i\|^p<\infty\ (i\in N)$，**则有**

$$E\|S_n\|^p<C\sum_{i=1}^{n} E\|X_i\|^p \qquad n\geq 1$$

收稿日期：2003－10－13
作者简介：赵　武(1980－)，**男，硕士生，主要从事概率理论方面的研究**.

2 主要结果及证明

定理　设$l(x)>0$为$x\to+\infty$时的慢变化函数。设$pa>1$，$1<p<2$，$p>q\geq 1$，B是二阶光滑空间；对每一B值同分布零均值鞅随机变元列$\{X_n\}$，$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，$\{X_n\}<V$，且$El(V^{1/a})V^p<\infty$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)E\{\max_{j\leq n}\|S_j\|-en^a\}<\infty,\forall e>0 \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)E\{\|S_n\|-en^a\}_+^q<\infty \tag{2}$$

证明　记F_j为$\{X_1,X_2,\cdots,X_j\}$生成的s域，$X_j=X_j'+X_j''$，其中

$$X_j'=X_jI[\|X_j\|\leq t^{1/q}+n^a]-E\{X_jI[\|X_j\|\leq t^{1/q}+n^a]/F_{j-1}\}$$

$$X_j''=X_jI[\|X_j\|>t^{1/q}+n^a]-E\{X_jI[\|X_j\|>t^{1/q}+n^a]/F_{j-1}\}$$

则　$S_j=S_j'+S_j''$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)E(\max_{j\leq n}\|S_j\|-en^a)_+^q=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)\int_0^{\infty}P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j''\|>t^{1/q}+n^a\right\}\mathrm{d}t$$

显然，S_j'是鞅，故$\|S_j'\|$是下鞅，由下鞅的极大值不等式，有

$$P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j'\|>n^a\right\}\leq Cn^{-2a}\max_{j\leq n}E\|S_j'\|^2\leq\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)\int_0^{+\infty}P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j'\|>\frac{1}{2}(t^{1/q}+en^a)\right\}\mathrm{d}t+$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)\int_0^{+\infty}P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j''\|>\frac{1}{2}(t^{1/q}+en^a)\right\}\mathrm{d}t\leq$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)\int_0^{n^{qa}}P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j'\|>\frac{1}{2}en^a\right\}\mathrm{d}t+C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)\int_0^{n^{qa}}P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j''\|>\frac{1}{2}en^a\right\}\mathrm{d}t+$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)\int_{n^{qa}}^{+\infty}P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j'\|>\frac{1}{2}t^{1/q}\right\}\mathrm{d}t+C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2+pa-qa}l(n)\int_{n^{qa}}^{+\infty}P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j''\|>\frac{1}{2}t^{1/q}\right\}\mathrm{d}t=$$
$$I_1+I_2+I_3+I_4$$

由于B是二阶光滑空间，故

$$P\{\max_{j\leq n}\|S_j'\|>n^a\}\leq Cnn^{-2a}EV^2I[V\leq 2n^a]$$

所以，$pa>1$，$1<p<2$时

$$I_1\leq\sum_{n=1}^{\infty}l(n)n^{pa-2}p\{\max_{j\leq n}\|S_j'\|>n^a\}\leq\sum_{n=1}^{\infty}Cn^{pa-2a-1}EV^2I[V\leq 2n^a]\,l(n)\leq$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}l(n)n^{pa-2a-1}\sum_{k\leq n}EV^2I[2K^a<V\leq 2(K+1)^a]\leq C\sum_{n=1}^{\infty}EV^2I[2K^a<V\leq 2(K+1)^a]K^{pa-2a}l(K)=$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}EV^pl(V^{\frac{1}{a}})I[2K^a<V\leq 2(K+1)^a]=CEI(V^{\frac{1}{a}})V^p<\infty$$

又由于$P\{\max_{j\leq n}\|S_j''\|n^a\}\leq C\,n^{-a+1}EVI[V>n^a]$，故当$pa>1$，$1<p<2$时

$$I_2\leq\sum_{n=1}^{\infty}l(n)n^{-2+pa}P\{\max_{j\leq n}\|S_j''\|>n^a\}\leq C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+pa-a}l(n)EVI[V>n^a]\leq$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1-a+pa}l(n)\sum_{k\geq n}EVI[K^a<V\leq(K+1)^a]\leq$$
$$C\sum_{n=1}^{\infty}EVI[K^a<V\leq(K+1)^a]K^{pa-a}l(K)\leq CEl(V^{1/a})V^p<\infty$$

由于$P\left\{\max_{j\leq n}\|S_j''\|>\frac{1}{2}t^{1/q}\right\}\leq Ct^{1/q}nEVI\left[V>\frac{1}{2}t^{1/q}\right]$，所以$pa>1$，$1<p<2$，$p>q$时

$$I_4 \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+pa-qa} l(n)\int_{n^{qa}}^{+\infty} t^{-1/q} EVI[V>t^{1/q}]\,\mathrm{d}t \le C\sum_{n=1}^{\infty} 2^{k(pa-qa)} l(2^K)\sum_{j=k}^{\infty}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}} EVI[V<t^{1/q}]\ t^{-1/q}\mathrm{d}t =$$

$$C\sum_{j=k}^{\infty}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}} EVI[V>t^{1/q}]t^{-1/q}\,\mathrm{d}t 2^{j(pa-qa)} l(2^j) = C\sum_{j=k}^{\infty}\int_{2^{ja}}^{2^{(j+1)qa}} EVI[V>y]y^{q-1}y^{-1}\mathrm{d}y 2^{j(pa-qa)} l(2^j) =$$

$$C\sum_{j=k}^{\infty} EVI[V>2^{ja}]2^{ja(q-1)}2^{j(pa-qa)} l(2^j) =$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\ge j} EVI[2^{ka}<V\le 2^{(K+1)a}]2^{jpa}2^{-ja} l(2^j) \le EV^p l(V^{1/a})<\infty$$

因S_n'是鞅，故$\|S_n'\|$是下鞅，由下鞅的极大值不等式，有

$$P\{\max_{j\le n}\|S_n'\|>\frac{1}{2}t^{1/q}\} \le CnEV^2I\left[V\le 2t^{1/q}\right]t^{-2/q}$$

当 $pa>1$，$1<p<2$ 时，注意 $p>q$，则

$$I_3 \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+pa-qa} l(n)\int_{n^{qa}}^{+\infty} EV^2I\left[V\le 2t^{1/q}\right]t^{-2/q}\mathrm{d}t = C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+pa-qa} l(n)\sum_{j=n}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)qa} EV^2I\left[V\le 2t^{1/q}\right]t^{-2/q}\,\mathrm{d}t \le$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)qa} t^{-2/q}EV^2I\left[V\le 2t^{1/q}\right]\mathrm{d}t\ j^{pa-qa} l(j) \le C\sum_{j=1}^{\infty} j^{pqa-1-2a} l(j)\sum_{k=0}^{j} EV^2I\left[2K^a<V\le 2(K+1)^a\right] \le$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty} k^{pa-2a} l(k)EV^2I[2K^a<V\le 2(K+1)^a] \le CEV^p l(V^{1/a})<\infty$$

证毕

推论　**设**$l(x)>0$ **为** $x\to+\infty$ **时的单增的慢变化函数。设** $pa>1$，$1<p<2$，$p=q\ge 1$，B**是二阶光滑空间；对每一**B**值同分布零均值鞅随机变元列**$\{X_n\}$，$S_n=\sum_{j=1}^{\infty} X_j$，$\{X_n\}<V$，**且** $El(V^{1/a})V^p<\infty$，$E\lg(V+1)l(V^{1/a})V^p<\infty$，**则对任意**$e>0$，**有**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+pa-qa}\ln(n)E\{\max_{j\le n}\|S_j\|-en^a\}<\infty \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2+pa-qa}\ln(n)E\{\|S_j\|-en^a\}_+^q<\infty \tag{4}$$

证明　**由同定理的证明过程可知** $I_1<\infty$，$I_2<\infty$。$p=q$ **时**，$pa=qa$

$$I_4 \le C\sum_{j=1}^{\infty} jl(2^j)\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}} P\{V>t^{1/q}\}\mathrm{d}t \le C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{2^{jqa}}^{2^{(j+1)qa}} P\{V>y\}y^{q-1}\mathrm{d}y\ jl(2^j)$$

$$I_3 \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}l(n)\sum_{j=n}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)^{qa}} t^{-2/q}EV^2I\left[V\le 2t^{1/q}\right]\mathrm{d}t \le C\sum_{j=1}^{\infty}\int_{j^{qa}}^{(j+1)^{qa}} t^{-2/q}EV^2I\left[V\le 2t^{1/q}\right]\mathrm{d}t l(j)\lg j \le$$

$$C\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2a} l(j)\lg j\sum_{k=0}^{j} EV^2I\left[2k^a\le V<2(k+1)^a\right] \le C\sum_{k=0}^{\infty} EV^p l(V^{1/a})\lg VI\left[2k^a\le V<2(k+1)^a\right] \le$$

$$CEV^p l(V^{1/a})\lg(V+1)<\infty$$

证毕

参　考　文　献

[1] Hsu P, Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers[J]. Proc Nat Acad Sci, 1947, 33:25-31

[2] Katz M. The probability in the tail of a distribution[J]. Anh Math Statist, 1963, 34: 312-318

[3] 陈良均, 王定成. Banach空间混合列强大数定律的收敛速度[J]. 电子科技大学学报, 1997, 26(1): 204-207

[4] 王定成, 陈良均. Banach空间F -mixing序列的完全收敛性[J]. 电子科技大学学报, 1996, 25(2): 216-219

编　辑　刘文珍