第 33 卷 第 2 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.33 No.2
2004 年 4 月　　Journal of UEST of China　　Apr. 2004

离散映射混沌系统的关联耦合同步

龚礼华

(达县师范高等专科学校物理系 四川 达州 635000)

【摘要】研究了驱动和响应系统为相同混沌系统、初值或参数不同时的同步问题。提出了关联耦合同步方法，通过对驱动与响应系统进行耦合，实现两个混沌系统的同步。并且，可以实施间歇性控制，减少控制代价。以logistic映射为例进行了计算机仿真研究，仿真结果证实了该方法对实现离散映射混沌系统同步的有效性。

关 键 词 混沌系统; 关联耦合; 同步; 离散映射

中图分类号 O545 文献标识码 A

Correlatively Coupled Synchronization of Discrete Mapping Chaotic Systems

Gong Lihua

(Department of Physics Daxian Teachers College SiChuan Dazhou 635000)

Abstract The synchronization of the drive system and response system which are described by the same chaotic systems but have different initial values or parameters is studied in this paper. A correlative coupling method of synchronizing chaos is proposed. Coupling these two systems each other can synchronize the drive system and response system. Furthermore, the intermittent control can be used to reduce the control cost. A computer simulation on two logistic maps is conducted. The simulation results illustrate the effectiveness of the proposed method for realizing the synchronization of discrete mapping chaotic systems.

Key words chaotic system; correlative coupling; synchronization; discrete mapping

见于混沌系统的内在随机性、连续宽谱和对初值具有的极端敏感等特点，使其特别适宜于保密通信。混沌同步是混沌保密通信中的一个关键技术，因此文献[1～4]对混沌系统的同步展开了较为深入的研究，提出了一些同步的方法。近年来，两个动力学表达形式及参量相同混沌系统的同步问题也受到了关注。由于混沌系统对初值极其敏感，两个相同参数混沌系统的初值相异(即使相差很小)，它们的运动轨迹也会随时间指数发散。当前对混沌应用研究的一个重要方向，就是利用这一初值敏感带来的不可预见性和内在随机性，实现混沌加密通信。而在实际应用中，通常存在干扰和噪声，要找出两个参数完全相同的混沌系统较困难，因此广义同步问题在实际中也具有重要意义。文献[5]通过系统变量的线性和非线性变换实现了对混沌有效控制。本文在此基础上，提出了关联耦合同步的方法。通过调整系统变量之间的线性关联矩阵，从而影响系统变量的运动轨迹，实现对两个具有相同函数形式但初值或参数不同的混沌映射的同步控制。

1 关联耦合同步的方法

关联耦合同步方法的基本思想是利用相关技术，把两个混沌系统中的系统变量通过关联矩阵进行耦合，通过调整耦合强度，达到同步控制的目的。

收稿日期：2003 – 08 – 28

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10175010)

作者简介：龚礼华(1944 –)，男，副教授，主要从事电磁场理论与混沌动力学方面的研究.

相关技术以信息论和随机过程理论作为基础。根据随机数据分析方法，对于平稳随机过程$\{X_k(t)\}$，其均值是与t无关的常数[6]。随机变量的数学期望，也称为平均值，定义为

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\ p_x(x)\mathrm{d}x=\overline{X} \tag{1}$$

式中　$p_x(x)$为随机变量，$X=\{x(t),\ t\in T\}$的概率密度函数(当t取离散值时，X即为离散参量随机序列)。对于X_1和X_2两个随机变量，其相关性表示为

$$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{X}_2]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2\,\boldsymbol{p}_{x_1x_2}(x_1x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \tag{2}$$

如果X_1和X_2是均值为零且互不相关的随机信号，根据线性代数和随机过程理论关于相关、内积和互相关函数的定义，互相关函数为

$$R_{X_1X_2}=E[X_1X_2]=\int_{-\infty}^{\infty} x_1p(x_1)\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{\infty} x_2p(x_2)\mathrm{d}x_2=E[X_1]E[X_2]=R_{X_2X_1}=0 \tag{3}$$

因此，相关函数是随机变量之间相似程度的度量。可把两个混沌系统看作m维的随机矢量，为使两个混沌系统同步，可通过一定的变量代换，将本不相关的随机过程变为相关，并将得到相关矢量反馈回原来的混沌系统，替代原有的随机矢量，达到同步效果。方法之一就是可以使用一个线性变换矩阵(关联矩阵)，将不相关的随机矢量变为相关矢量。

设X_1和X_2是均值为零且互不相关的m维的随机矢量信号，对其分别进行线性变换，并构造新的随机信号矢量$\boldsymbol{X}_1'$和$\boldsymbol{X}_2'$，有

$$\boldsymbol{X}_1'=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{X}_2 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{X}_2'=\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{X}_2 \tag{5}$$

式中　$\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$和$\boldsymbol{B}_4$为$m\times m$维的变换矩阵(关联矩阵)。由互相关函数的定义，新的两个随机信号矢量的相关性为

$$\boldsymbol{R}_{X_1'X_2'}=E\left[\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_2'^{T}\right]=\boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{X}_2)(\boldsymbol{B}_3\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}_4\boldsymbol{X}_2)^T\right]=\boldsymbol{E}\left[(\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{X}_2)(\boldsymbol{X}_1^T\boldsymbol{B}_3^T+\boldsymbol{X}_2^T\boldsymbol{B}_4^T)\right] \tag{6}$$

式(6)整理得

$$\boldsymbol{R}_{X_1'X_2'}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{R}_{X_1X_1}\boldsymbol{B}_3^T+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{R}_{X_1X_2}\boldsymbol{B}_4^T+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{R}_{X_2X_2}\boldsymbol{B}_4^T+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{R}_{X_2X_1}\boldsymbol{B}_3^T \tag{7}$$

由式(3)，最终得

$$\boldsymbol{R}_{X_1'X_2'}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{R}_{X_1X_1}\boldsymbol{B}_3^T+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{R}_{X_2X_2}\boldsymbol{B}_4^T \tag{8}$$

由上式可知，当随机矢量X_1和X_2在所有频率上能量非均匀分布时，就有$\boldsymbol{R}_{X_1'X_2'}>0$。因此，通过上述变换，新的随机矢量$X_1'$和$X_2'$具有了相关性。对于混沌的驱动和响应系统，可通过类似变量之间的线性转换(即关联耦合)，增强驱动和响应系统变量间的关联性，并最终在采用一定关联强度的情况下，实现混沌同步。

考虑可以产生混沌的两个一维的离散系统(多维系统可类推)

驱动系统
$$x_{n+1}=f(x_n,u_1) \tag{9}$$

响应系统
$$y_{n+1}=f(y_n,u_2) \tag{10}$$

式中　u_1和u_2分别为两个混沌系统的参数，取值可以相同或不同。因为即使$u_1=u_2$，只要系统初值不同，由于混沌对初值的敏感性，两个系统的轨迹也是不相干的。令关联矩阵(线性转换矩阵)$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$，其中$a_{ij}$为变量之间的矩阵关联强度。重新构造两个随机变量

$$\begin{bmatrix}x_n'\\ y_n'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n\\ y_n\end{bmatrix} \tag{11}$$

当需要进行同步控制时，以x_n'和y_n'替代原系统式(9)和(10)中的x_n和y_n，起到一个增强系统之间相关性的作用，并通过选择合适的关联强度，达到控制混沌同步的目的。

2　数值仿真结果

考虑用logistic映射表示的两个系统

$$x_{n+1}=u_1x_n(1-x_n) \tag{12}$$

$$y_{n+1} = u_2 y_n (1 - y_n) \quad (13)$$

其中，当$3.57 \leq u_1$，$u_2 \leq 4$时，对于任何$x_0 \in (0, 1)$和$y_0 \in (0, 1)$的初值，系统式(12)和(13)都会进入混沌状态[7]。

如果取$u_1=u_2$，则上述两个系统的表达形式和参数完全相同。然而当初值x_0和y_0的取值不同时，由于混沌系统的初值敏感性，两个系统的轨迹是不相干的。此时将系统式(12)看作驱动系统，系统式(13)看作响应系统。采用如下的关联耦合方法实现两个系统的同步。

令

$$x'_n = a_{11} x_n + a_{12} y_n \quad (14)$$

$$y'_n = a_{21} x_n + a_{22} y_n \quad (15)$$

当进行同步控制时，以x'_n和y'_n分别反馈回混沌系统式(12)和(13)，得到受控后的系统方程为

$$x_{n+1} = u_1 x'_n (1 - x'_n) \quad (16)$$

$$y_{n+1} = u_2 y'_n (1 - y'_n) \quad (17)$$

选取$u_1=u_2=3.7$，$x_0=0.45$，$y_0=0.6$，固定$a_{11}=a_{22}=0.22$不变，只改变关联权值a_{12}和a_{21}。从迭代次数n=1 000开始进行关联耦合同步控制，由计算机数值运算所得到的仿真结果如图1和图2所示。

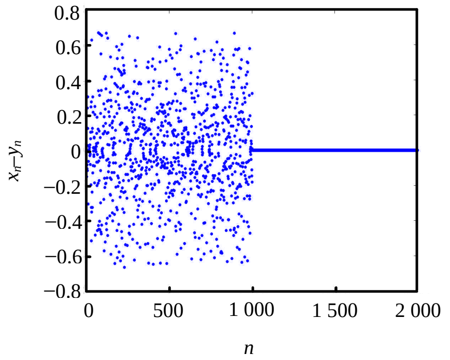

图 1 $a_{12}=a_{21}=0.83$ 时的混沌同步结果

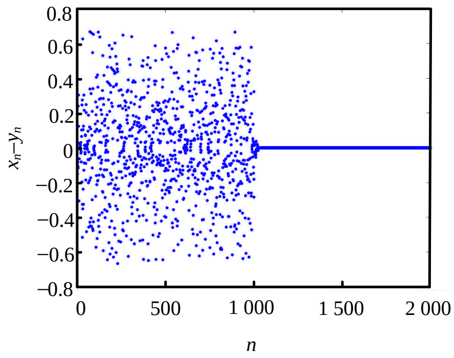

图 2 $a_{12}=a_{21}=0.3$ 时的混沌同步结果

从图1和图2中看出，加入关联耦合控制后，当保持关联矩阵权值$a_{11}=a_{22}=0.22$不变时，仅使另外两个关联权值在一定范围内改变，就可使系统式(12)和(13)很快同步。从同步过程的数值仿真结果可知，当要求一定精度时，二者同步速度是迅速的。例如，在上述其他参数不变的情况下，取$a_{12}=a_{21}=0.3$时，仅迭代5次左右就达到10^{-6}控制精度。当$a_{12}=a_{21}=0.83$时，虽然同步速度有所减慢，但也在迭代约100次后达到了同样的精度。通过数值仿真得知：在$u_1=u_2=3.7$，$x_0=0.45$，$y_0=0.6$，$a_{11}=a_{22}=0.22$时，使驱动和响应系统能够同步的关联强度a_{12}和a_{21}的取值范围为$0 \leq a_{12}$，$a_{21} \leq 0.84$。

当固定a_{12}和a_{21}的取值，仅改变a_{11}和a_{22}的取值，在一定的取值范围内也可以实现混沌系统的同步。选取$u_1=u_2=3.7$，$x_0=0.45$，$y_0=0.6$，固定$a_{12}=a_{21}=0.5$不变，同样从迭代次数n=1 000开始进行关联耦合同步控制，只改变关联权值a_{11}和a_{22}所得到的仿真结果如图3和图4所示。在系统参数和初值取以上值时，由数值仿真得到的能够使系统式(12)和(13)同步的a_{11}和a_{22}取值范围为$-0.119 \leq a_{11}$，$a_{22} \leq 0.58$。

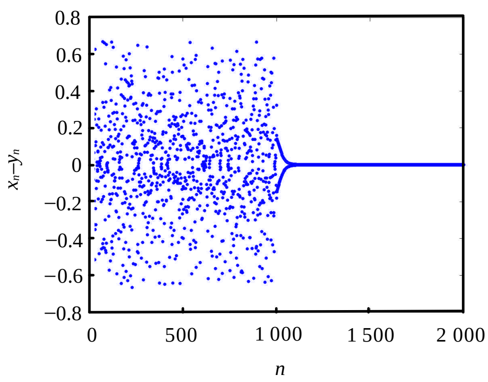

图 3 $a_{11}=a_{22}=-0.118$ 时的混沌同步结果

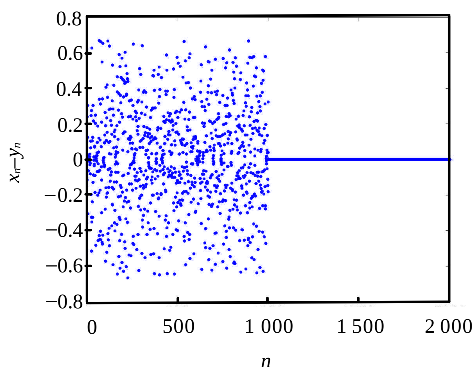

图 4 $a_{11}=a_{22}=0.58$ 时的混沌同步结果

以上是两个混沌系统的表示形式和参数完全相同，仅初值不同时采用关联耦合方法进行同步的情况。当$u_1 \neq u_2$时，采用关联耦合方法进行混沌同步，数值仿真结果表明：关联强度在一定范围内取值时，仍可实现两个混沌系统的同步，但两个系统之间不是达到精确同步，而是广义混沌同步[8]。

在实际应用中实施混沌同步时，需要考虑同步的控制代价问题。与连续性的控制方法相比，间歇性控制可以用较低的代价获得预定的同步要求。本文提出的关联耦合同步控制方法，也可允许控制有一定间歇周期，从而减少控制代价。此时

$$\begin{cases} x_{n+1} = u_1 x'_n (1 - x'_n), \quad y_{n+1} = u_2 y'_n (1 - y'_n) & \mathrm{mod}(n, N) = 0 \\ x_{n+1} = u_1 x_n (1 - x_n), \quad y_{n+1} = u_2 y_n (1 - y_n) & \mathrm{mod}(n, N) \neq 0 \end{cases} \tag{18}$$

式中　N为控制的间歇周期。当系统从第n次迭代开始进行控制后，只有$\mathrm{mod}(n,N)=0$时才进行关联耦合控制，增强系统间的相关性。计算机数值仿真实验表明：当N=1~6时，仍然可以实现混沌系统的同步。随着间歇控制周期N的增大，控制次数减少，已无法实现同步；但是，通过改变关联强度，在同样的间歇周期N时也可以实现混沌同步。这两种情况的仿真结果，分别如图5和图6所示。

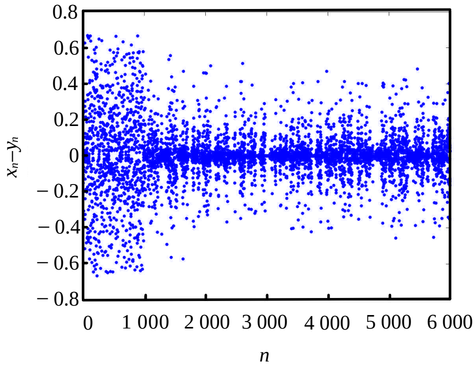

图 5　$a_{11} = a_{22}$=0.5 时的数值仿真结果

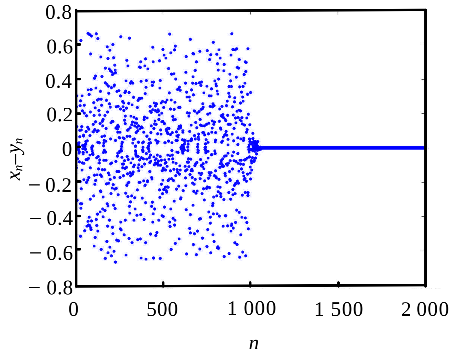

图 6　$a_{11} = a_{22}$=0.3 时的混沌同步结果

这说明采用本文的控制方法，当控制有一定的间歇周期时，同步速度和效果与间歇周期N和关联强度都有密切关系。

3　结　论

本文讨论了驱动系统和响应系统为相同混沌系统但其初值或参数不同时的同步问题，并且采用关联耦合方法对驱动和响应系统进行耦合，使两个混沌系统得到同步。该方法对于无论系统初值不同或参数不同的两个表达形式相同的系统，都能使驱动和响应系统实现同步或广义同步。此方法允许控制有一定的间歇周期，可以减少控制代价。仿真结果表明，本文的方法是有效的、而且实施灵活便捷。

参　考　文　献

[1] Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(08): 821-824

[2] 贺明峰，穆云明，赵立中．基于参数自适应控制的混沌同步[J]．物理学报，2000, 49(05): 830-832

[3] 杨林保，杨　涛．非自治混沌系统的脉冲同步[J]．物理学报，2000, 49(1): 33-37

[4] 关新平，唐英干，范正平，等．基于神经网络的混沌系统鲁棒控制自适应同步[J]．物理学报，2001, 50(11): 2 112

[5]罗晓曙，刘慕仁，方锦清，等．一种基于系统变量的线性和非线性变换实现混沌控制的方法[J]．物理学报，2000, 49(05): 849-853

[6] (美)贝达特J S，皮尔索A G著．随机数据分析方法[M]．凌福根译．北京：国防工业出版社，1976, 86-182

[7] 关新平，范正平，陈彩莲，等．混沌控制及其在保密通信中的应用[M]．北京：国防工业出版社，2002: 7-18

[8] 胡　岗，萧井华，郑志刚．混沌控制[M]．上海：上海科技教育出版社，2000, 86-90

编　辑　孙晓丹