# C-半群的弱概周期性

谢灵红[1]，李明奇[2]

(1. 西南交通大学应用数学系 成都 610031; 2. 电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】假设在有界C-半群的概轨道$u(\cdot)$的轨迹在Banach空间$X$中是弱紧的条件下，研究了C-半群的弱概周期性，得到了$Cu(\cdot)$是弱概周期的；特别在$X$是自反的Banach空间的情况下，不用其假设条件也能获得同样的结论；相应获得了有界C-半群点的弱概周期。

**关 键 词** C-半群; 概轨道; 概周期; 弱概周期

**中图分类号** O177.2 **文献标识码** A

# Weakly Almost Periodic of C-Semigroup

Xie Linghong[1]，Li Mingqi[2]

(1. Dept. of Appl. Mathematics, Southwest Jiaotong university Chengdu 610031;

2. School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** In this paper, weakly almost periodic of C-semigroup is studied, Let $u(\cdot)$ is almost-orbit of a bounded C-semigroup on a Banach space $X$, assuming that $u(\cdot)$ has weakly relatively compact range in $X$, We obtain that $Cu(\cdot)$ is weakly almost periodic. In particular, in the case that $X$ is reflexive Banach space，we show the same concusion without the assumption of condition that is weakly relatively compact in $X$ is unnecessary for the same concusion. Accordingly we have weakly almost periodic of point in a bounded C-semigroup.

**Key words** C-semigroup; almost-orbit of C-semigroup; almost periodic; weakly almost periodic

由抽象Cauchy问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=Au(t) \qquad t>0,\ u(0)=x \tag{1}$$

推动和发展起来的强连续半群、C-半群近来引起了广泛的注意[1~4]。众所周知，生成C-半群的算子类比生成强连续半群的算子类要大得多。弱概周期性是函数的一种重要性质，它和概周期性、遍历性、渐近稳定性及渐近概周期都有密切关系。众多作者都对$C_0$-半群的弱概周期性进行了系统的研究[5~6]，但至今对C-半群的弱概周期性的研究仍不深入，因它与$C_0$-半群的弱概周期性有本质区别，本文对这一问题进行了探讨。

## 1 预 备

所有算子都是线性的，$D(A)$是$A$的定义域，$X$是Banach空间，$B(X)$是$X$上的所有有界线性算子所组成线性空间，$C\in B(X)$且是单射的，$R(C)$是$C$的值域。$R^+=[0,+\infty)$，$C_b(R^+,X)$是从$R^+$到$X$的所有有界连续函数空间。$w\in R^+$ 和 $f\in C_b(R^+,X)$，设 $f_w(t)=f(t+w)$，$t\in R^+$，$H(f)=\{f_w: w\in R^+\}$是$f$在$R^+$上所有

收稿日期：2003－09－04

基金项目：国家自然科学基金资助项目(60372012)；重庆市应用基础研究资助项目(4031)。

作者简介：谢灵红(1969－)，男，博士生，讲师，主要从事分布参数控制理论及应用方面的研究.

平移集。

**定义**1　称$T(t)\in B(X)(t\geq 0)$为Banach空间 $X$ 上的C-半群，如果$T(0)=C$，$\lim_{t\to 0}T(t)x=Cx$，$\forall x\in X$，及$CT(t+s)=T(t)T(s),\forall t,s\geq 0$。又称由 $D(A)=\{x\in X,\lim_{t\to 0}(T(t)x-Cx)/t$ 存在且在 $R(C)$ 中$\}$，$Ax=C^{-1}[\lim_{t\to 0}(T(t)x-Cx)/t]$ 定义的线性算子 $A$ 为C-半群$T(t)$的生成元。

**定义**2　称函数 $f\in C_b(R^+,X)$ 是弱概周期的，如果$H(f)$在$C_b(R^+,X)$是弱相对紧的，弱概周期函数空间称$W(R^+,X)$。

**定义**3　称函数$u\in C(R^+,X)$是C-半群$T(t)$的概轨道，如果$\lim_{t\to\infty}\sup_{h\in R^+}\|u(t+h)-C^{-1}T(h)u(t)\|=0$。

**命题**1[5]　对函数 $f\in C_b(R^+,X)$，下面结论是等价的:

1) $u\in W(R^+,X)$。

2) 存在唯一确定函数 $g\in AP(R,X)$ 和 $j\in W_0(R^+,X)$ 使得 $u=g|_{R^+}+j$。其中 $W_0(R^+,X)=\{j:j\in W_0(R^+,X),\lim_{t\to+\infty}j(t)=0\}$。

3) $(f_n)_n$，$((t_m,x_m^*))_m$ 分别是 $R^+$ 和 $R^+\times B_{X^*}$ 的任意序列，如果极限 $a=\lim_n\lim_m<u(t_m+f_n),x_m^*>$ 和 $b=\lim_m\lim_n<u(t_m+f_n),x_m^*>$存在，则$a=b$。

## 2　C-半群的弱概周期性

C-半群$T(t)$的概轨道是比较多的，例如容易验证若$T(t)$是 $X$ 上有界的C-半群，$x_0\in X$，$f\in L^1(R^+,X)$，则$T(t)x_0$和$u(t)=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$都是C-半群$T(t)$的概轨道。本文的主要结果是定理1，为了证明此结果先从一引理开始。

**引理**1　设$u(\cdot)$是 $X$ 上有界C-半群$T(t)$的概轨道，则$Cu(\cdot)$在$[0,+\infty)$上一致连续。

**证**：令$M=\sup_{t\geq 0}\|T(t)\|$和$F(t)=\sup_{s\geq 0}\|u(t+s)-C^{-1}T(s)u(t)\|$。由概轨道的概念可知对$\forall e>0$，存在$t_0=t_0(e)>0$使得当$t\geq t_0$时有$F(t)<e/\max(3\|C\|,3M)$。又因$u(\cdot)$在$[0,t_0+1]$是一致连续，存在$d=d(e)>0(d<1)$使得当$t,t'\in[0,t_0+1]$且$|t-t'|<d$时有$\|u(t)-u(t')\|<e/\max(3\|C\|,3M)$。

当 $t\in[0,t_0\}$，则$t'\in[0,t_0+1]$和$\|Cu(t)-Cu(t')\|\leq\|C\|\cdot\|u(t)-u(t')\|<e/3$。

当$t>t_0$，有

$$\begin{aligned}\|Cu(t)-Cu(t')\|&\leq\|Cu(t')-T(t-t_0)u(t'-t+t_0)\|+\|Cu(t)-T(t-t_0)u(t_0)\|+\|T(t-t_0)u(t'-t+t_0)-T(t-t_0)u(t_0)\|\leq\\&\|C\|F(t'-t+t_0)+M\|u(t'-t+t_0)-u(t_0)\|+\|C\|F(t_0)<e\end{aligned}$$

因此，$Cu(\cdot)$在$[0,+\infty)$上一致连续。

**定理**1　设$T(t)$是 $X$ 上有界的C-半群，$u(\cdot)$是C-半群$T(t)$的概轨道，$g(u)=\{u(t):t\geq 0\}$在 $X$ 中是弱紧的，则$Cu(\cdot)$是弱概周期的。

**证**：设$(f_n)_n$，$((t_m,x_m^*))_m$ 分别是$R^+$和$R^+\times B_{X^*}$的任意序列，如果极限$a=\lim_n\lim_m<Cu(t_m+f_n),x_m^*>$和$b=\lim_m\lim_n<Cu(t_m+f_n),x_m^*>$存在，由命题1可知只要显示$a=b$就行。下面分两种情况证明：

1) 当$(f_n)_n$是有界时。

不妨设$f_n\to f\in R^+(n\to+\infty)$，由引理1可知$Cu(\cdot)$在$[0,+\infty)$上一致连续,因而有对任意$e>0$，存在$n_0\in N$，当 $n_0>N$，$t>0$ 时有 $\|Cu(t+f_n)-Cu(t+f)\|<e$。从而可以得到 $b=\lim_m\lim_n<Cu(t_m+f_n),x_m^*>=\lim_m<Cu(t_m+f),x_m^*>$。令$a_n=\lim_m<Cu(t_m+f_n),x_m^*>$,当 $n_0>N$ 有$|a_n-b|=\lim_m|<Cu(t_m+f_n)-Cu(t_m+f),x_m^*>|<e$，因而有$a=\lim_n a_n=b$。

2) 当$(f_n)_n$是无界时。

设$f_n\to\infty(n\to+\infty)$和$(u(f_n))_n$弱收敛于$x_0\in X$ (因$g(u)$在 $X$ 中是弱紧的)。对每一$m\in N$,因为$u(\cdot)$是C-半群$\{T(t)\}_{t\geq 0}$的概轨道，则有

$$\lim_n < Cu(t_m+f_n), x_m^* >= \lim_n(< Cu(t_m+f_n)-T(t_m)u(f_n), x_m^* > + < T(t_m)u(f_n), x_m^* >) \leq$$
$$\|C\|\lim_n < u(t_m+f_n)-C^{-1}T(t_m)u(f_n), x_m^* > + \lim_n < T(t_m)u(f_n), x_m^* >=$$
$$< T(t_m)x_0, x_m^* >$$

即有 $b=\lim_m < T(t_m)x_0, x_m^* >$。又因 $(T(t_m)^* x_m^*)_m$ 是 $X^*$ 中一个有界序列，则存在 $x_0^* \in X^*$ 和 $(T(t_m)^* x_m^*)_m$ 中子序列 $(T(t_{m_l})^* x_{m_l}^*)_l$ 弱*收敛于 $x_0^*$。因此 $\forall e>0$，存在 $n_0 \in N$，使得当 $n_0>N$ 有

1) $|< u(f_n)-x_0, x_0^* >| < e/2$。

2) $\| < u(t+f_n)-C^{-1}T(t)u(f_n) \| < e/(2\|C\|), \forall t \geq 0$。

再令 $a_n=\lim_m < Cu(t_m+f_n), x_m^* >$，当 $n_0>N$ 有

$$|a_n-b| = \lim_l |< Cu(t_{m_l}+f_n)-T(t_{m_l})x_0, x_{m_l}^* >| \leq$$
$$\lim_l |< Cu(t_{m_l}+f_n)-T(t_{m_l})u(f_n), x_{m_l}^* >| + \lim_l |< T(t_{m_l})u(f_n)-T(t_{m_l})x_0, x_{m_l}^* >| \leq$$
$$\frac{e}{2}+\lim_l |u(f_n)-x_0, T(t_{m_l})^* x_{m_l}^* >| \leq$$
$$\frac{e}{2}+\lim_l |u(f_n)-x_0, x_0^* >| < e$$

因而有 $a=\lim_n a_n=b$。

由定理1和自反的Banach空间的性质易得到下面两个推论。

**推论1** 设 $T(t)$ 是 $X$ 上有界的C-半群，$x_0 \in X$，则有

1) 若 $\{T(t)x_0, t \geq 0\}$ 在 $X$ 中是弱紧的，则 $T(\cdot)Cx_0$ 是弱概周期的；

2) 若 $f \in L^1(R^+, X)$，$u(t)=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$，$g(u)=\{u(t): t \geq 0\}$ 在 $X$ 中是弱紧。则 $Cu(\cdot)$ 是弱概周期的。

**推论2** 设 $X$ 是自反的Banach空间，$T(t)$ 是 $X$ 上有界的C-半群，$x_0 \in X$，则有

1) $T(\cdot)Cx_0$ 是弱概周期的；

2) 若 $f \in L^1(R^+, X)$，$u(t)=T(t)x_0+\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s$，则 $Cu(\cdot)$ 是弱概周期的。

本文研究工作得到电子科技大学青年科学基金项目资助(No. yf021013)，在此表示感谢。

## 参 考 文 献

[1] Bart H, Goldberg S. Characterizations of almost periodic strongly continuous groups and semgroups[J]. Math.Ann., 1978, 236(2): 105-116

[2] Zheng Quan, Liu Liping. Almost periodic regularized groups and cosine functions[J]. J.Math. Anala. Appl., 1996, 197(9): 90-112

[3] 钟守铭, 黄元清. 有时滞的非线性系统的BIBO稳定化[J]. 电子科技大学学报, 2000, 29(6): 655-657

[4] 杨瞩宏, 李明奇. 高阶非线性中立型方程正解的存在性[J]. 四川大学学报, 2000, 37(2): 158-163

[5] Ruess W M, Summers W H. Weakly almost periodic semigroups of operators[J]. Pacific J.Math., 1990, 143(1): 175-193

[6] Ruess W M, Summers W H. Minimal sets of almost periodic motions[J]. Math.Ann., 1986, 276(3): 145-155

编 辑 漆 蓉