第33卷 第3期 电子科技大学学报 Vol.33 No.3
2004年6月 Journal of UEST of China Jun. 2004

计算最大Lyapunov指数的推广小数据量法

张 勇，陈天麒，陈 滨
（电子科技大学电子工程学院 成都 610054）

【摘要】在分析常用的计算最大Lyapunov指数小数据量法的基础上，研究了混沌吸引子时间轨道的不可逆特性，提出基于后向搜索和双向搜索计算最大Lyapunov指数的推广小数据量法通用经验公式。数值仿真表明，新方法比原来仅做前向搜索的小数据量法在计算准确度和抗噪声性能上更加优越。

关 键 词 小数据量法；推广算法；最大Lyapunov指数；混沌
中图分类号 O332 文献标识码 A

Extended Methods for Calculating Largest Lyapunov Exponent from Small Data Sets

Zhang Yong，Chen Tianqi，Chen Bin
(School of Electronic Engineering, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract After analyzing recently common methods of calculating the largest Lyapunov exponent from small data sets, the irreversible property of time trajectories is studied and extended method for calculating the largest Lyapunov exponent of chaotic system is proposed based on backward or bi-direction search phase point. The computer simulation shows some valuable conclusions that the novel method is more anti-noise and precise that the old ones.

Key words small data sets; extended method; largest Lyapunov exponent; chaos

研究实际观测序列是否具有混沌特性的常用方法是分析观测序列的最大Lyapunov指数l，当$\infty > l > 0$时，一般认为该观测系统具有混沌特性。自1985年Wolf提出根据观测序列计算Lyapunov指数的方法以来，至今在这方面比较成熟的算法还有Jacobian方法、p范数方法与Rosenstein和Kantz等人提出的小数据量法[1, 2]。小数据量法相对于其他方法更具有对相空间的嵌入维数、重建延时、观测噪声等鲁棒性，计算Lyapunov指数的同时，还可以得到关联维数等其他混沌系统的重要特征量。但这种方法仅考虑了前向搜索相点，本文基于对混沌演化轨道的分析，提出了后向和双向搜索相点的方法，得到了通用的小数据量法。

1 常用计算最大Lyapunov指数的小数据量法

分析混沌序列首先需观测序列相空间的重构，本文假定已经按某种常用的相空间重构方法得到了观测相空间。将构造的相空间记为$X=[X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_N]^T$，相点$\boldsymbol{X}_j=[x_{j-(m-1)J},\ x_{j-(m-2)J},\ \cdots,\ x_j]$，$j=1,2,\cdots,N$，其中，$N$为相点总数，$m$为相空间的嵌入维数，$J$为重建延时，一般情况，$J=k\Delta t$，$k$为正整数，$\Delta t$为采样间隔。

文献[1，2]提出基于观测序列计算最大Lyapunov指数的方法，都称为小数据量法，最大Lyapunov指数定义如下。

收稿日期：2003－05－19
作者简介：张 勇(1975－)，男，博士生，主要从事混沌信号处理方面的研究.

定义 1　对于 $\forall\ \boldsymbol{X}_j \in \boldsymbol{X}$，记 $d_j(0)=\inf\limits_{X_k \in X}\left\|\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{X}_k\right\|=\left\|\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{X}_{\hat{j}}\right\|$，且 $\left|j-\hat{j}\right|>p$，p为时间轨道平均周期。如果 $\exists\ \boldsymbol{X}_{j+i}\in \boldsymbol{X}$ 且 $\boldsymbol{X}_{\hat{j}+i}\in \boldsymbol{X}$，记 $d_j(i)=\left\|\boldsymbol{X}_{j+i}-\boldsymbol{X}_{\hat{j}+i}\right\|$，则前进距离 $d_j(i)$ 有如下近似关系式

$$d_j(i)\approx d_j(0)\mathrm{e}^{\,l i\Delta t} \tag{1}$$

式中　Δt 为观测序列的采样间隔或步长；i为相点沿时间轨道的滑动步长序数；l为最大Lyapunov指数。

对式(1)两边取自然对数，得

$$\ln d_j(i)\approx \ln d_j(0)+l\,i\Delta t \tag{2}$$

当 $d_j(i)=\left\|\boldsymbol{X}_{j+i}-\boldsymbol{X}_{\hat{j}+i}\right\|$（$\|\cdot\|$表示向量2范数)时，即得到文献[1]求最大Lyapunov指数的经验公式。考虑到局部计算的影响，其最后的经验公式为

$$\frac{1}{\Delta t}<\ln d_j(i)>\approx \frac{1}{\Delta t}<\ln d_j(0)>+l\,i \tag{3}$$

式中　$<\cdot>$ 是按相空间的点数求平均。

式(2)中的 $d_j(i)$ 还可以为其他的形式，也可以得到相应的小数据量法。如令

$$d_j(i)=\left|x_{j+i}-x_{\hat{j}+i}\right| \tag{4}$$

即可以得到文献[2]提出的小数据量法。与文献[1]小数据量法不同的是，文献[2]在计算初始 $d_j(0)$ 时，给定了一个邻域范围，并使用了这个邻域内的所有邻近点，对于一个固定的j，有多个满足条件的 $\hat{j}$，即有

$$d_j(i)=\frac{1}{\left|U(\boldsymbol{X}_j)\right|}\sum_{X_{\hat{j}}\in U(X_j)}\left|x_{j+i}-x_{\hat{j}+i}\right| \tag{5}$$

从上面分析可见，文献[1, 2]中的用于计算Lyapunov指数的经验公式形式上相同，即为小数据量法计算Lyapunov指数的经验公式。

2　时间轨道不可逆特性

从定义1可看出，沿相空间中时间轨道前进的方向，起始选定的距离很小的两个相点经过有限的滑动步数i后，两个相点的距离呈指数关系分离。实际上，沿时间轨道后退方向，相点滑动后的距离仍为指数关系分离，符合沿时间轨道前进的规律，这种时间轨道不可逆特性是混沌系统本身的混沌特性所固有的。

利用Henon映射，第一种情况选择相空间中时间轨道上相距2 766步、空间距离为0.032 1的相点，第二种情况选择时间轨道上相距2 815步、空间距离为0.143 5的相点。各自分别沿时间轨道向前和向后滑动50步，其空间距离变化如图1和图2所示（从图中横坐标0向左为后退、向右为前进）。

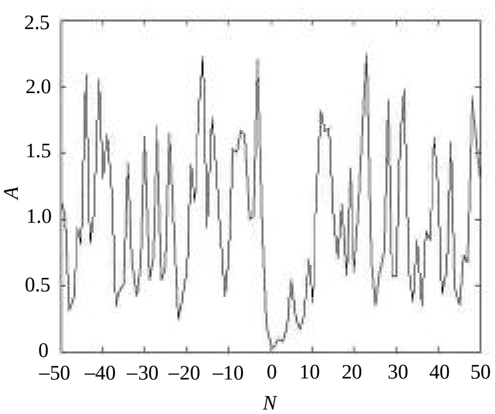

图1　第一种情况时间轨道滑动空间距离变化

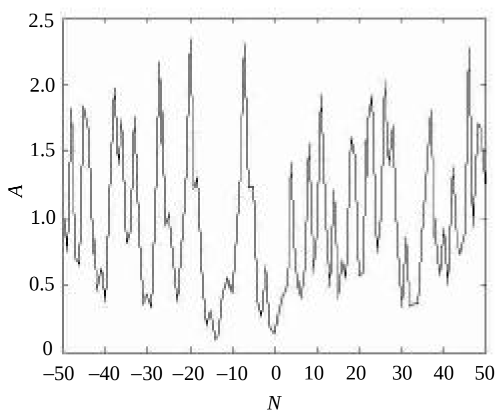

图2　第二种情况时间轨道滑动空间距离变化

定义 2　对于 $\forall\ \boldsymbol{X}_j \in \boldsymbol{X}$，记 $d_j(0)=\inf\limits_{X_k \in X}\left\|\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{X}_k\right\|=\left\|\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{X}_{\hat{j}}\right\|$，且 $\left|j-\hat{j}\right|>p$，p为时间轨道平均周期。如果 $\exists\ \boldsymbol{X}_{j-i}\in \boldsymbol{X}$，且 $\boldsymbol{X}_{\hat{j}-i}\in \boldsymbol{X}$，记 $d_j(-i)=\left\|\boldsymbol{X}_{j-i}-\boldsymbol{X}_{\hat{j}-i}\right\|$，则后退距离 $d_j(-i)$ 有如下近似关系

$$d_j(-i) \approx d_j(0)\mathrm{e}^{l i \Delta t} \tag{6}$$

式中 符号含义同定义1。

3 推广算法

文献[1, 2]的方法虽然在选择相点间的空间距离上存在着差异，但就其沿时间轨道的滑动都是基于前向搜索邻近点。通过改变$d_j(i)$的表达式，可以得出其他的经验公式。根据向量范数的概念可以得到以下的距离表示式：

1) p范数下向量的距离

$$d_j(i) = \left\| \boldsymbol{X}_{j+i} - \boldsymbol{X}_{\hat{j}+i} \right\|_p = \left(\sum_{k=-(m-1)J}^{0} \left| x_{j+i+k} - x_{\hat{j}+i+k} \right|^p \right)^{1/p} \qquad 1 \leqslant p < \infty \tag{7}$$

2) p范数下似向量的距离

$$d_j(i) = \left\| \boldsymbol{X}_{j+i} - \boldsymbol{X}_{\hat{j}+i} \right\|_{\hat{p}} = \left(\sum_{k=-K}^{0} \left| x_{j+i+k} - x_{\hat{j}+i+k} \right|^p \right)^{1/p} \qquad 1 \leqslant p < \infty，0 \leqslant K \leqslant (m-1)J \tag{8}$$

当p=2时，式(7)即为文献[1]中的方法。当p=1且K=0时，式(8)即为文献[2]中的方法。可见，通过对$d_j(i)$赋予不同的定义，可以将文献[1，2]的经验公式统一起来。找到基准初始相点后，其经验公式都沿时间轨道向前搜索相点。事实上，可以沿时间轨道向后搜索相点，也可以沿时间轨道双向搜索相点。

当基于相空间的时间轨道向后搜索邻近点，即采用后向算法时，根据定义2和式(6)，可有如下计算Lyapunov指数的经验公式

$$\frac{1}{\Delta t} < \ln d_j(-i) > \approx \frac{1}{\Delta t} < \ln d_j(0) > + l i \tag{9}$$

式中 $<\cdot>$是按相空间的点数求平均。

式(3)和式(9)合并即得到双向搜索相点的经验公式为

$$\frac{1}{2\Delta t}\left(< \ln d_j(i) > + < \ln d_j(-i) > \right) \approx \frac{1}{\Delta t} < \ln d_j(0) > + l i \tag{10}$$

如果采用前向搜索相点的方法，如文献[1，2]经验公式的相空间中按时间轨道的最后i个相点不能作为基准相点，采用后向搜索相点的算法，相空间中按时间轨道的前面i个相点不能作为基准相点。当采用双向搜索相点算法时，相空间中的所有相点都可以得到应用。

4 实 验

本文使用表1所示的两个映射，采用推广算法和文献[1，2]的算法计算最大Lyapunov指数，其结果如表2所示。

表1 本文所用映射及最大Lyapunov指数理论值

映射	方程	参数	Δt / s	理论值
Henon	$x_{i+1} = 1 - a x_i^2 + y_i$ $y_i = b x_i$	$a = 1.4$ $b = 0.3$	1	0.418
Logistic	$x_{i+1} = m x_i (1 - x_i)$	$m = 4.0$	1	0.693

从表2的实验结果可以得出以下结论：1) 小数据量法的推广算法是可行的，而且，在加了信噪平均幅度比为5%的噪声(相当于信噪功率比为25～26 dB)后，基于时间轨道不可逆特性的双向算法对噪声有抗拒作用，算出的Lyapunov指数的准确度高；2) 针对每一列分别选取了同一种近似合理的邻域（实验中是盒子内选取），目的在于说明不同的算法，其基准点的选取标准不完全相同，即需要多次调整邻域大小作出多条曲线；3) 实际观测数据中不可避免地带有噪声，此时，小数据量法的推广算法计算出的结果比实际动力系统的Lyapunov指数值偏低，当信噪平均幅度比达到5%时，误差最高可达30%左右，使用双向算法后的误差也较大，故实际观测序列需要进行噪声压制。

表2　在0%，5%信噪比情况下，得到的Lyapounov指数比较

		Henon映射		Logistic映射	
		0%	5%	0%	5%
向量1范数法	前向	0.418 0	0.346 0	0.692 1	0.442 2
	双向	*	0.402 1	*	0.583 3
向量2范数法	前向[1]	0.417 1	0.339 8	0.681 5	0.433 4
	双向	*	0.397 3	*	0.575 8
向量无穷范数法	前向	0.417 5	0.329 2	0.666 3	0.435 6
	双向	*	0.404 7	*	0.563 1
向量p范数法(p=3)	前向	0.417 5	0.346 7	0.675 3	0.442 7
	双向	*	0.400 3	*	0.572 1
似向量1范数法(K=0)	前向[2]	0.417 0	0.339 6	0.680 5	0.449 7
	双向	*	0.431 2	*	0.587 2

注：*表示尚未用推广算法计算的Lyapunov指数。

5　结 束 语

本文分析了文献[1, 2]的计算最大Lyapunov指数的小数据量法，分析了混沌序列时间轨道的不可逆特性，提出了基于后向和双向搜索相点的计算最大Lyapunov指数的推广小数据量方法，通过调整基准相点对沿时间轨道滑动的方向和滑动后相点对的距离表示方法，得到了推广算法的通用经验公式，并通过数值仿真验证了该算法的可行性。

参 考 文 献

[1 Rosenstein M T, Collins J J, De L C J. A practical method for calculating largest lyapunov exponents from small data sets[J]. Physica D, 1993, 65: 117 - 134

[2] Kantz H, Schreiber T. Nonlinear time series analysis[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000. 58-68

编　辑　徐培红