第33卷 第3期
2004年6月

电子科技大学学报
Journal of UEST of China

Vol.33 No.3
Jun. 2004

一类记数问题的规划解法

李 力[1]，苏正君[2]

(1. 西南交通大学峨嵋校区 四川 峨嵋 614202; 2. 洛阳师范学院数学系 河南 洛阳 471022)

【摘要】针对一类偏序关系的记数，根据其特征将其转化为一类不定方程组的非负整数解的个数，利用母函数的方法得到了解的递推公式及其组合意义，并给出了与之联系的有趣的三角形数表。

关 键 词 半序集; 不定方程组; 非负整数解； 规划解

中图分类号 TP311.1 文献标识码 A

Programming Solution of a Class of Indefinite Equations

Li Li[1]，Su Zhengjun[2]

(1. Emei Branch School of Southwest Jiaotong University Sichuan Emei 614202; 2. Luoyang Normal University Henan Luoyang 471022)

Abstract A relation of equivalence on a finite set is discussed, and it is transformed into the number of solutions of an indefinite system of equations. Formula and their combinatorial meaning of nonnegative integral solution of such equations are given.

Key words partially ordered set; indefinite equation; nonnegative integral solution； programming solution

有限集上各种关系的数目计算与著名难题$\underline{n}$上拓扑数目密切相关。为解决此难题，本文研究了有限集上各种关系及其等价类的数目计算公式或近似计算公式[1]。

1 一类计数问题

设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$是n个元素的集合，“$\le$”是A上一个自反的、反对称的关系。令

$$M_k=\{a_i\,|\,A\text{中恰有}n-k+1\text{个元}\le a_i\}，\quad x_k=|M_k| \qquad k=1,2,\cdots,n$$

称$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为关系“$\le$”的特征向量。两个自反的、反对称的关系等价是指它们有相同的特征向量。下面讨论A上自反的、反对称关系的等价类的题目。

因“$\le$”具有自反性，A中有n个元素，由$x_i(i=1,2,\cdots,n)$定义知：A上“$\le$”的特征向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$必须满足方程

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=n \\ x_i\geq 0 \qquad i=1,2,\cdots,n \\ x_1\leq 1 \\ x_1+x_2\leq 2 \\ \qquad\vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}\leq n-1 \end{cases} \tag{1}$$

反之，式(1)的任一组解$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，必存在具有自反性及反对称性的关系，它的特征向量为：

收稿日期：2004－04－21
作者简介：李 力(1959－)，男，经济师，主要从事应用数学方面的研究.

$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。因此，问题归结为求式(1)的解的个数。

问题的解法：方程组式(1)中的第一式与解的个数无关，因此只需求

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 \\ \quad \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq n-1 \end{cases} \tag{2}$$

的非负整数解。

定理 1　设不定方程组式(2)的解的个数为 a_n，则 $a_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$ (本文提到方程组的解均指非负整数解)。

证明　设 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n = n, \quad \forall K \in \{1, 2, \cdots, n\}$，令

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_i \leq i-1 \qquad i = 1, 2, \cdots, k-1 \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = k \tag{4}$$

$$x_{k+1} + \cdots x_{k+j} \leq j \qquad j = 1, 2, \cdots, n-k-1 \tag{5}$$

的解集为 a_{nk} (注：当 k=1时，只有式(4)和式(5)，当 $k = n$ 时，只有式(3)和式(4))。而1)　$k \neq h$ 时，$a_{nk} \cap a_{nk} = F$；2)　$\sum_{k=1}^{n} |a_{nk}| = a_n$；3)　a_{nk} 的元素个数为 $a_{k-1} \cdot a_{n-k}$ (设 $a_0 = 1$)。由式1～3得

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \cdots + a_{n-1} a_0$$

设数列 $\{a_n\}$ 的母函数为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，注意到 $a_1 = 1$，$f(x)$ 适合方程 $x \cdot f^2(x) - f(x) + 1 = 0$。又因 $f(0) = a_0 = 1, \quad f(x) = (2x)^{-1}(1 - \sqrt{1-4x})$，把 $(1-4x)^{1/2}$ 展开代入上式可得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} C_{2n}^n x^n$$

故通项公式为

$$a_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

证毕

2　结论拓广及应用实例

定理 2　设 m、k 是非负整数，$m \geq 2n+k-2$，记不定方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \\ x_1 \leq k \\ x_1 + x_2 \leq k+2 \\ \quad \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq k + 2(n-2) \end{cases} \tag{6}$$

的非负整数解的个数为 $b_n(k)$，则

$$\begin{cases} b_{n+1}(k) = b_{n+1}(k-1) + b_n(k+2) \\ b_{n+1}(k) = b_n(2) + b_n(3) + \cdots + b_n(k+2) \end{cases} \tag{7}$$

由于 $b_2(k) = k+1$，式(7)为递推公式。方程组

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \\ x_0 \leq k \\ x_0 + x_1 \leq k+2 \\ \quad \cdots \\ x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} \leq k + 2(n-1) \end{cases} \tag{8}$$

的解的个数为$b_{n+1}(k)$，将其解分为以下两部分：

1) $x_0=0$，式(8)变为

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=m \\ x_1 \leqslant k+2 \\ \qquad \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1} \leqslant k+2(n-1) \end{cases}$$

其解的个数为$b_n(k+2)$；

2) $x_0 \neq 0$，式(8)变为

$$\begin{cases} x_0+x_1+x_2+\cdots+x_n=m \\ 1 \leqslant x_0 \leqslant k \\ x_0+x_1 \leqslant k+2 \\ \qquad \vdots \\ x_0+x_1+\cdots+x_{n-1} \leqslant k+2(n-1) \end{cases}$$

令$y_0=x_0-1,\ y_i=x_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$，则得

$$\begin{cases} y_0+y_1+y_2+\cdots+y_n=m-1 \\ y_0 \leqslant k-1 \\ y_0+y_1 \leqslant k+1 \\ \qquad \vdots \\ y_0+y_1+\cdots+y_{n-1} \leqslant k+2n-3 \end{cases}$$

可见其解的个数为$b_{n+1}(k-1)$，从而有$b_{n+1}(k)=b_{n+1}(k-1)+b_n(k+2)$，反复利用上式并考虑到$b_{n+1}(0)=b_n(2)$得

$$b_{n+1}(k)=b_n(2)+b_n(3)+\cdots+b_n(k+2)$$

例 甲、乙两人参加竞选，由于某原因，甲的得票至少是乙得票的2倍时，才算甲当选。设乙得票n张，甲得票$2n+k$张，问甲的得票至少是乙得票的2倍的唱票记录有多少种可能？

解 用$x_1+x_2+\cdots+x_i \ (1 \leqslant i \leqslant n)$表示票箱中剩有乙的$i-1$张票时所剩甲的票数，问题转化为求不定方程组

$$\begin{cases} x_1 \leqslant k \\ x_1+x_2 \leqslant k+2 \\ \qquad \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_n \leqslant 2n+k-2 \end{cases}$$

的非负整数解的个数，故所求的唱票种数为$b_{n+1}(k)$。

关于解的个数的三角形数学运算规律如图1所示。图中给出了式(6)当$k=0$及$k=1$时解的个数。图中“—”、“~”分别对应于$k=0$及$k=1$。

定理 3 设m、k、d是非负整数，$d>0,\quad m \geqslant k+(n-1)d$，记$C_n(k)$为不定方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=m \\ x_1 \leqslant k \\ x_1+x_2 \leqslant k+d \\ \qquad \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_{n-1} \leqslant k+(n-2)d \end{cases} \tag{9}$$

的非负整数解的个数，则

$$C_{n+1}(k)=C_n(d)+C_n(d+1)+\cdots+C_n(d+k)$$

													1
												2	
											3		
										4	3		
									5	7			
								6	12				
							7	18	12				
						8	25	30					
					9	33	55						
				10	42	88	55						
			11	52	130	143							
		12	63	182	273								
	13	75	245	455	273								
…													

图1　解的个数的三角形数字图

证明方法与定理2完全类似，同样也可给出方程组式(9)的组合意义及与之联系的三角形数字图。更一般地有：

定理 4　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 m 为正整数，且 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le m$，记不定方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = m \\ x_1 \le a_1 \\ x_1 + x_2 \le a_2 \\ \qquad \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \le a_n \end{cases} \tag{10}$$

的非负整数解的个数为 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，则

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f(a_2, a_3, \cdots, a_n) + f(a_2 - 1, a_3 - 1, \cdots, a_n - 1) + \cdots + f(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \cdots, a_n - a_1) \tag{11}$$

证明　类似于定理2的证明，将式(10)的非负整数解分为 $x_1 = 0$ 与 $x_1 \ne 0$ 两部分。式(10)满足 $x_1 = 0$ 的解的个数为 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，满足 $x_1 \ne 0$ 的解的个数为 $f(a_2 - 1, a_3 - 1, \cdots, a_n - 1)$，故

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f(a_2, a_3, \cdots, a_n) + f(a_2 - 1, a_3 - 1, \cdots, a_n - 1) \tag{12}$$

注意到 $f(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \cdots, a_n - a_1) = f(a_2 - a_1, a_3 - a_1, \cdots, a_n - a_1)$，反复利用式(12)可得式(11)。

参 考 文 献

[1] 金基恒著. 布尔矩阵理论及其应用[M]. 何善育译. 北京: 知识出版社, 1987
[2] 黄天民, 徐　扬, 吴建乐. 格序引论及其应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1998

编　辑　刘文珍