

## 电磁场时域解的差分-谱混合方法

齐红星<sup>1</sup>, 陈树德<sup>1</sup>, 乔登江<sup>1</sup>, 庞小峰<sup>2</sup>

(1. 华东师范大学物理系 上海 200062; 2. 电子科技大学生命科学与技术学院 成都 610054)

**【摘要】**经典的时域有限差分方法由于受到稳定性条件限制,在分析含有细微结构的散射体时,计算代价很高。为克服这一缺陷,提出了一种求电磁问题时域解的差分-谱混合方法。文中采用适当近似,将Maxwell方程中各物理量作周期延拓,利用延拓前后各物理量在第一个周期上保持不变,其频谱由连续谱变为离散谱的特性,将连续谱问题转化为离散谱求解。周期延拓后,空间各点场量的离散谱通过求解频域Maxwell差分方程得到,利用Fourier逆变换导出原问题的时域解。该方法的优点是不受稳定性条件的限制,对处理散射体特征结构尺寸远小于激励源波长的电磁问题明显优于FDTD方法,而且它能处理任何线性色散介质,和完全匹配层边界条件结合使用时不需要额外代码。数值试验表明,该方法实现简单,精度高。

**关键词** 差分-谱混合方法; 周期延拓; 色散介质; 绝对稳定

中图分类号 TP301.6 文献标识码 A

## A Difference-Spectrum Hybrid Method for the Solution of Maxwell Equations in Time Domain

Qi Hongxing<sup>1</sup>, Chen Shude<sup>1</sup>, Qiao Dengjiang<sup>1</sup>, Pang Xiaofeng<sup>2</sup>

(1. Department of Physics, East China Normal University Shanghai 200062;

2. School of Science & Technology, UEST of China Chengdu 610054)

**Abstract** A novel difference-spectrum hybrid numerical technique is proposed in this paper. In this method, each time dependent variable in Maxwell's equations is periodically continued with proper approximation, which results in the conversion of the continuous-spectrum problem to a discrete one by virtue of the consistent of solution before and after periodical continuation in the first period. The discrete spectra of the field quantities after continuation are obtained from difference Maxwell curl equations in frequency-domain and the time-domain solution of the original problem is derived from their inverse Fourier transforms. The strong point of the proposed method is its high capability of calculating any dispersive media and utilizing PML boundary condition without additional codes. Due to its unconditional stability, this technique excels Yee's FDTD in dealing with electromagnetic problems where the characteristic sizes of the scatter are much larger than the wavelength of the stimulant source. Numerical experiments demonstrate its effectiveness, easy implementation and high precision.

**Key words** difference-spectrum hybrid method; periodical continuation; dispersive media; unconditional stability

随着时域有限差分方法(Finite-Difference Time-Domain, FDTD)的快速发展<sup>[1]</sup>,差分技术在电磁计算中的

收稿日期: 2003-11-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50137030)

作者简介: 齐红星(1974-),男,博士生,主要从事电磁计算方面的研究。

应用日益突出。虽然该方法在时域内通过一次求解可以得到宽频带上的响应,但它处理色散介质的能力却十分有限,仅能计算Debye或Lorentz介质<sup>[2-4]</sup>。事实上很多实际存在的介质并不能用这两种介质模型所描述,如动物组织,其电容率是频率的复杂函数。FDTD方法不能处理一般色散介质的原因在于时域内极化率和场量的数字卷积是一个代价很高的运算。另外,在计算散射体特征结构(如小孔或小槽)远小于激励源波长的电磁问题时,由于受到稳定性条件的限制,FDTD需要计算的步骤太多,需要大量的计算资源,甚至导致计算无法实现。谱域内求解Maxwell方程组是在单个频率点上进行的,它和介质电容率(磁导率)在频域的表达方式无关,同时也不存在稳定性问题。本文利用谱方法处理时间变量,采用差分方法处理空间变量,提出了一种求电磁问题时域解的新方法。

## 1 差分-谱混合方法

考虑如下频域Maxwell方程组

$$\begin{cases} i\omega\bar{\epsilon}(r,\omega)\mathbf{E}(r,\omega) = \nabla \times \mathbf{H}(r,\omega) - \mathbf{J}(r,\omega) \\ i\omega\bar{\mathbf{m}}(r,\omega)\mathbf{H}(r,\omega) = -\nabla \times \mathbf{E}(r,\omega) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\bar{\epsilon}(\omega)$ ,  $\bar{\mathbf{m}}(\omega)$  分别为张量电容率和磁导率,各场量均为空间位置和频率的复函数。采用Yee氏交错网格的中心有限差分,将式(1)离散化并消除磁场分量,得到电场的方程

$$\mathbf{M}\mathbf{E} = \mathbf{J} \quad (2)$$

式中  $\mathbf{E} = \{E_x, E_y, E_z\}^T$ ,  $\mathbf{J} = \{J_x, J_y, J_z\}^T$ 。系数矩阵 $\mathbf{M}$ 每行只有13个非零元素的稀疏矩阵,并且对于介质相同的点,在系数矩阵中对应的元素也相同,这使得可以利用特殊的处理技术节约计算资源。

设置激励源 $\mathbf{J}(r,\omega)$ ,解方程组(2),可以得到空间各点电场在频率点 $\omega$ 上的响应。如果激励电流源的频谱是由有限分离的频率点组成,分别在每个频率点上解方程(2),然后再将这些结果组合起来容易得到空间各点的时域解。然而,对于实际存在的,持续时间有限的脉冲激励源,其频谱一般是连续的并占有一定的带宽。为了得到时域解,需要知道在激励源所占有的带宽内各频率点上的响应。显然,在连续无限多的频率上实现这一点较困难。为此,考虑如下时域Maxwell方程

$$\begin{cases} \mathbf{e}_0\mathbf{E}(r,t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \bar{\mathbf{c}}_e(r,t)\mathbf{E}(r,t-t)dt = \nabla \times \mathbf{H}(r,t) - \mathbf{J}(r,t) \\ \mathbf{m}_0\mathbf{H}(r,t) + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \bar{\mathbf{c}}_h(r,t)\mathbf{H}(r,t-t)dt = -\nabla \times \mathbf{E}(r,t) \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\bar{\mathbf{c}}_e$ 和 $\bar{\mathbf{c}}_h$ 分别为张量极化率,  $\mathbf{e}_0$ 和 $\mathbf{m}_0$ 分别为真空电容率和磁导率。在激励源持续时间有限的情况下,式(3)中各场量在经过充分长时间后必衰减到足够小,以致可以忽略。选择充分长时间 $T$ 作为周期,将式(3)中各含时量延拓为 $t \in (-\infty, +\infty)$ 上的周期函数。此时式(3)的解在 $t \in [0, T]$ 上和没有作周期延拓前是一致的。虽然式(3)的频域形式对应着式(1),但周期延拓后,式(1)在频域内的解变为离散谱。就可以通过求解频域内的离散谱而得到场量在 $t \in [0, T]$ 内的时域解。由Fourier级数的收敛性可知,通过求解有限多项离散谱得到符合一定精度的时域解。所求离散谱的数目 $N$ 取决于周期 $T$ 的选择,激励源的带宽和计算精度的要求。

假设通过式(2)得到某点场量的频谱为

$$f\left(n\frac{2\pi}{T}\right), n \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \quad (4)$$

则该场量在 $t \in [0, T]$ 内的时域形式为

$$F(t) = \sum_{n=-N}^N f\left(n\frac{2\pi}{T}\right)e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (5)$$

上述将连续谱问题转化为离散谱求解在物理上可解释为对同一有限时间电磁过程进行无限次重复。

对式(5)也可以换一个角度来理解。在没有进行周期延拓前,场量的频谱为 $f(\omega)$ 。由Fourier变换,其时域形式为

$$F(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega}{2\pi} \quad (6)$$

由于  $f(\omega)$  占有一定带宽  $[-W, W]$ , 式(6)中的积分可近似用逐段求和代替, 选择求和步长为  $2\pi/T$ , 则

$$F(t) = \sum_{n=-\frac{WT}{2\pi}}^{\frac{WT}{2\pi}} T^{-1} f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (7)$$

其中

$$f\left(n\frac{2\pi}{T}\right)T^{-1} = T^{-1} \int_0^T F(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt \quad (8)$$

为延拓后对应的周期函数的Fourier变换。

上面的方法在  $\omega=0$  的情况存在困难。经过分析发现, 根本无需求  $\omega=0$  时的解, 因为对于任何散射问题, 当激励源结束后经过充分长时间, 散射场逐渐衰减到0。通过式(5)将已经得到的  $2N$  项组合起来

$$F(t) = \sum_{n=-N}^{-1} f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) e^{in\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{n=1}^N f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) e^{in\frac{2\pi}{T}t} \quad (9)$$

然后加上一个常数修正量, 使  $F(T)=0$ , 最终得到的时域解为

$$F(t) = \sum_{n=-N}^{-1} f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) e^{in\frac{2\pi}{T}t} + \sum_{n=1}^N f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) e^{in\frac{2\pi}{T}t} - \left( \sum_{n=-N}^{-1} f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) + \sum_{n=1}^N f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) \right) \quad (10)$$

方程(2)的求解是在离散的频率点上进行的, 它对  $\bar{\epsilon}$  和  $\bar{m}$  的表达式没有限制, 适用任何色散的线性介质。这一优点使得在计算域的周围设置PML界条件尤为方便。如果采用不需要进行场分裂的单轴各向异性匹配层(UPML)介质<sup>[6]</sup>, 仅需要对相应区域内的电磁参数根据UPML的要求进行赋值, 不需要对程序代码作任何额外的改动。

无论是计算色散还是非色散介质, 该方法的另外一个好处在于它不象Yee方法一样受稳定性条件的限制, 对于计算激发源波长远大于散射体细小特征结构的问题可大大节约计算资源。对于激发源为时谐波的情况, 该方法仅需一次求解就可得出所有空间点上的场量。

## 2 数值试验

为检验上面的计算方法, 首先计算了厚度为  $d=40$  mm 的无限大色散介质板对垂直入射脉冲波的透射。空间网格  $\Delta=4$  mm, 电流源  $J(t)=(st)^2 e^{-st/2}$  ( $s=10$  s<sup>-1</sup>) 设置在距离介质板左表面边  $5\Delta$  处, 检验点距离介质板右表面  $10\Delta$ 。先假设板中的介质为Debye介质, 其电容率为  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_s + (\mathbf{e}_\infty - \mathbf{e}_s)/(1+i\omega t)$ , ( $\mathbf{e}_s=1.8$ ,  $\mathbf{e}_\infty=81$ ,  $t=9.4 \times 10^{-12}$  s) 选择延拓周期  $T=400$  ns, 计算的最高频率为100 MHz, 结果如图1所示。其中同时给出了利用色散介质时域有限差分((FD)<sup>2</sup>TD)方法计算的结果。从中可以看出, 本文的计算方法在处理Debye介质时和((FD)<sup>2</sup>TD)方法得到的结果一致性很好。为说明该方法在计算一般色散介质上的应用, 令  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_s + (\mathbf{e}_\infty - \mathbf{e}_s)/(1+(i\omega t)^{1-a})$  ( $a=0.8$ ), 保持其他计算参数不变, 对上面的问题进行了重新计算, 结果如图2所示。图3所示是它所对应的频谱和FDTD在单频上计算结果的比较, 从中可以看出两者的结果是吻合的。为了简便, 边界条件一律采用一阶Mur吸收边界条件<sup>[7]</sup>。

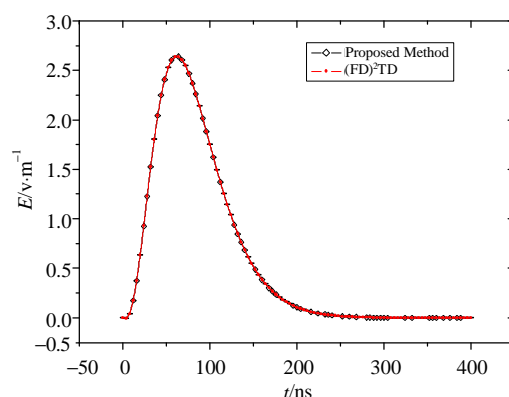


图1 透射波电场随时间的变化

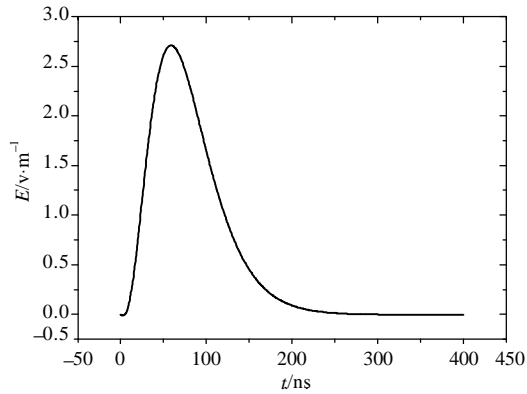


图2 透射波电场随时间的变化

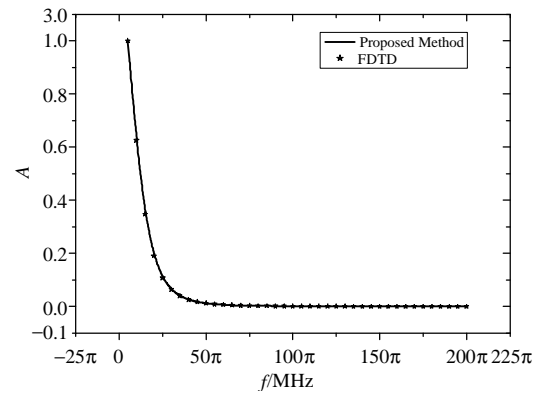


图3 图2中电场的归一化谱

### 3 结论

本文提出了一种计算电磁问题时域解的差分-谱混合方法。该方法能够处理一般色散介质，易于和PML边界条件结合。数值实验表明该方法具有FDTD方法的精度。由于没有稳定性条件限制，该方法在计算特征尺度远小于激发波源的波长的问题上能节约大量计算资源。

### 参 考 文 献

- [1] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media[J]. IEEE Trans. on AP, 1966, 14(5): 302-307
- [2] 高本庆, 陈金元. 色散介质中电磁场时域有限差分法[J]. 中国科学, 1994, 24(5): 538-545
- [3] Luebbers R J, Hunsberger F P, Kunz K S, *et al.* A frequency-dependence finite-difference time-domain formulation for dispersive materials[J]. IEEE Trans. on EMC, 1990, 32(3): 222-227
- [4] Sullivan D M. A frequency-dependent FDTD method for biological applications[J]. IEEE Trans.on MTT, 1992, 40(3): 532-539
- [5] Berenger J P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 114: 185-200
- [6] Stephen D G. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices[J]. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1996, 44(12): 1 630-1 639
- [7] Bi Z, Wu K, Wu C, *et al.* A dispersive boundary condition for microstrip component analysis using the FD-TD method[J]. IEEE Trans. on MTT, 1992, 40: 774-777

编辑 孙晓丹