第 33 卷 第 4 期 电 子 科 技 大 学 学 报 Vol.33 No.4
2004 年 8 月 Journal of UEST of China Aug. 2004

非线性极大极小问题的可行信赖域算法

陈华富[1]，钮 海[2]
(1. 电子科技大学应用数学学院 成都 610054; 2. 四川大学数学学院 成都 610064)

【摘要】针对一类非线性约束极大极小问题,利用极大熵方法将转化为带不等式约束的非线性规划问题，给出了一种可行信赖域算法,解决了不等式约束的非线性大系统优化问题，并证明了该算法的全局收敛性。初步的数值试验表明，对于该类极大极小问题，本算法有良好的数值表现。

关 键 词 极大极小问题; 信赖域算法; 不等式约束; 算法的收敛性
中图分类号 O212.2 文献标识码 A

A Feasible Trust Algorithm of Nonlinear Max-Min Problems

Chen Huafu，Niu Hai
(1. School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054; 2. Department of Mathematics Sichuan University Chengdu 610064)

Abstract A feasible trust algorithm which used maxim-entropy methods, a class of max-min problems with nonlinear constraints turn into nonlinear programming problems with inequality constraints is proposed. The algorithm which resolve general max-min problems is global convergent. Preliminary numerical experiments show that the proposed algorithm is effective.

Key words max-min problem; trust region algorithm; inequality constraints; convergence

工程和管理领域的许多实际问题都可以归结为极大极小化问题，对该问题的算法研究有着十分重要的意义。由于非线性系统的复杂性，目前极大极小问题的算法大多是针对约束为线性问题构造的[1,2]。对一类约束为极大极小问题，可以利用求解约束非线性规划的算法来解，但在实际应用中还有一定的困难[3~5]。近年来，非线性优化问题的信赖域算法由于它的二次全局收敛性和数值稳健性而得到广泛的关注,并在无约束、线性约束和等式约束的优化问题中提出了一系列的信赖域算法[6, 7]。文献[8]针对不等式约的优化问题提出了一种可行信赖域算法，取得了较好的数值实验效果。

本文针对一类非线性约束极大极小问题，利用极大熵方法将转化为带不等式约束的非线性规划问题，结合文献[8]提出的可行信赖域算法，较好地实现不等式约束非线性大系统优化问题的求解。

1 问题、记号

考虑不等式约束的极大极小问题

$$\text{(MNP)}\begin{cases}\min & f(x)=\max(f_i(x)) \qquad i=1,2,\cdots,m\\ \text{s.t} & h_i(x)\le 0 \qquad i=1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{1}$$

令 $f_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum\limits_{j=1}^{m}\mathrm{e}^{qf_i(x)}$ ，则(MNP)转化为

收稿日期：2003 – 10 – 08
基金项目：国家自然科学基金资助项目(30200059)
作者简介：陈华富(1968 –)，男，在职博士生，副教授，主要从事功能磁共振，独立成分分析，优化算法等方面的研究.

$$\text{(MNP1)}\begin{cases}\min & f_q(x)\\ \text{s.t} & h_i(x)\le 0 \quad i=1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{2}$$

引理 1 当q充分大时(MNP)与(MNP1)等价。

证明 $f_q(x)=\dfrac{1}{q}\ln\sum_{j=1}^{m}\mathrm{e}^{qf_i(x)}$，则 $\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)\le f_q(x)\le \max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)+\dfrac{\ln m}{q}$

当q充分大时：$f_q(x)=\max\limits_{1\le i\le m} f_i(x)$，所以(MNP)与(MNP1)等价。

下面讨论(MP1)的解，为便于记号，简单记为

$$\text{(NP)}\begin{cases}\min & f(x)\\ \text{s.t} & h_j(x)\le 0 \quad j=1,2,\cdots,l\end{cases} \tag{3}$$

记$I=\{1,2,\cdots,l\}$，可行区域$R=\{x\mid h_j(x)\le 0, j\in I\}$，指标集$J(x)=\{j\in I\mid h_j(x)=0\}$。

假设$h_j\in C^2$，$j=1,2,\cdots,l$，对任意$x\in R$，$\{\nabla h_j(x), j\in J(x)\}$线性无关。对任意$x,x^k\in R$定义$g_j(x)=\nabla h_j(x)$，$H_j(x)=\nabla^2 h_j(x)$，$D_k=D(x^k)=\mathrm{diag}(h_j(x^k)^2,\ j\in I)$，$N_k\triangleq N(x^k)=(h_j(x^k), j\in I)$，$Q_k\triangleq Q(x^k)=(N_k^TN_k+D_k)^{-1}N_k^T$。

考虑信赖域的二次规划为

$$\text{SP}\begin{cases}\min & q_k(d)=f(x)+g(x)^Td+0.5d^TB_kd\\ \text{s.t} & h_j(x^k)+g_j(x^k)^Td\le 0,\ j\in I\\ & d\in r_kW\end{cases} \tag{4}$$

式中 r为实数，同时$r_k>0$，集合W是一个给定以原点为内点的紧集，这里$rW=\{rw\mid w\in W\}$，B_k是近似Hessian阵。

定义 $I_k=\{j\in I\mid h_j(x^k)+g_j(x^k)^Td^k=0\}$，$b^k=(b_j^k, j\in I)$，$e^k=(e_j^k, j\in I)$，$e_j^k=\begin{cases}1 & j\in I\\ 0 & j\in I\setminus I_k\end{cases}$，$b_j^k=\begin{cases}h_j(x^k+d^k) & j\in I_k\\ 0 & j\in I\setminus I_k\end{cases}$，$\tilde{d}^k=Q_k^T(-\|d^k\|^Te^k-b^k)$，目标函数在$x^k$处的估计下降量$\Delta q_k=q_k(0)-q_k(d^k)=-g(x^k)^Td^k-0.5(d^k)^TB_kd^k$和真实下降量$\Delta f_k=f(x^k)-f(x^k+d^k+\tilde{d}^k)$。

引理 2[8] 1) $(\boldsymbol{N}_k^T\boldsymbol{N}_k+\boldsymbol{D}_k)$是正定矩阵；2) 估价下降量$\Delta q_k\ge 0$，若$\Delta q_k=0$，则$x^k$为(NP)的K-T点。

2 算法、性质

1) 选择参数，q充分大，$s>2, t\in(2,3)$，$d,a,b\in(0,1), d<g, g,h>0$，$h,d$适当小，$r_1>h$，$x$和$c$分别是充分小和充分大的正数，$W$是以原点为内点的紧集，$e=(1,\cdots,1)^T$，取初始点$x^1\in R$及初始对称阵$B_1$，$k=1$。

2) 求解二次规划(SP)的最优解d^k。

3) 计算Δq_k，若Δq_k=0，则x^k是(NP)的K-T点，停；否则计算修正方向$\tilde{d}^k$及$\Delta f_k(x)$。

4) 如 $\|B_kd^k\|\le c\|d^k\|^{1/2}, h_j(x^k+d^k+\tilde{d}^k)\le 0, j\in I$，$\Delta q_k\ge x\|d^k\|^s$，$s_k\triangleq\dfrac{\Delta f_k}{\Delta q_k}\ge d$，令$x^{k+1}=x^k+d^k+\tilde{d}^k$，$r_{k+1}=\begin{cases}2r_k & s_k>g\\ r_k & s_k\le g\end{cases}$，计算新的矩阵$\boldsymbol{B}_{k+1}$，令$k$=$k$+1转2)，否则转5)。

5) 若$r_k<h$，则转6)否则令$r_k=0.25r_k$，转2)。

6) 计算辅助可行下降搜索方向$\tilde{d}^k$

$$p^k=-Q_kg(x^k), w_k=\sum_{j\in I}\max\{-p_j^k, p_j^kh_j(x^k)^2\}, P_k=E_n-N_kQ_k$$

$$r_k=\frac{\left\|P_k g(x^k)\right\|^2+w_k}{1+\left|e^T p^k\right|}，\quad v^k=(v_j^k, j\in I)，\quad v_j^k=\begin{cases}-1-r_k & p_j^k<0\\ h_j(x^k)^2-r_k & p_j^k\geq 0\end{cases}$$

如 $r_k=0$，则 x^k 为NP的K-T点，停，否则计算

$$\tilde{d}^k=r_k\{-P_k g(x^k)+Q_k^T(v^k+\frac{r_k}{2(1+\left|e^T p^k\right|}e)\}$$

7) 计算数列 $\{1, b, \cdots\}$ 中满足下列条件的最大值的 l_k

$$f(x^k+l\tilde{d}^k)\leq f(x^k)+lag(x^k)^T\tilde{d}^k, h_j(x^k+l\tilde{d}^k)\leq 0, j\in I$$

8) 置 $x^{k+1}=x^k+l\tilde{d}^k$，$r_{k+1}=r_k$，计算 B_{k+1}，置k=k+1转2)。

引理 3[9] 可行点 x^k 为NP的K-T点的充要条件是 $r_k=0$。

引理 4[8] 如 $\lim\limits_{k\in K}x^k=x^*$，对任意的 $k\in K$，$x^{k+1}=x^k+d^k+\tilde{d}^k$ 有 $\lim\limits_{k\in K}d^k=0$。

由引理2和3可得。

定理 1 算法或有限步终止于(NP)的K-T点，或得到一无限点列，若该点包含在一紧集中，则其任一聚点为(NP)的K-T点。

由引理1和定理1可得。

定理 2 算法或有限步终止于(MNP)的最优点，或得到一无限点列，若该点包含在一紧集中，则其任一聚点为(MNP)的最优点。

3 数值实验

$$\min(\max\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\})$$
$$\text{s.t}\begin{cases}g_1(x)=x_1^2-x_2\leq 0\\ g_2(x)=x_1+x_2-3\leq 0\end{cases}\tag{5}$$

式中 $f_1(x)=x_1^4+x_2^2$，$f_2(x)=(2-x_1)^2+(2-x_2)^2$，$f_3(x)=2\exp(-x_1+x_2)$。

根据本算法取初始点x=(0,0)利用MATLAB编写，x^*=(0.999 999 234 2, 0.999 999 892 1)，目标函数值 $f(x^*)$=2.000 000 952 3。从数值实验表明，该数值实验效果较好，而且收敛速度较快。

参 考 文 献

[1] 王云诚, 唐焕文. 一类非线性大系统优化问题的逼近算法[J]. 系统工程学报, 1999, 14(4): 366-369

[2] 李兴斯. 非线性极大极小问题的一个有效解法[J]. 科学通报, 1991, 19: 1 448-1 456

[3] 施保昌, 陆 磊. 约束极大极小问题的一类有效算法[J]. 系统工程, 1998, 16(6): 11-15

[4] 陈华富. 一般约束极大极小问题的梯度投影算法[J]. 电子科技大学学报, 2000,29(6):662-665

[5] 陈华富, 田益祥. 一般约束极大极小问题的广义梯度投影算法[J]. 电子科技大学学报, 2000, 29(3): 319-322

[6] Shultz G A, Schbabel R B, Byra R H. A family of trust-region-based algorithm ms for unconstrained minimization with strong global convergence properties[J]. SIAM J Numer. Anal., 1985, 22: 147-67

[7]Powell M J D, Yan Y. A trust region algorithm for equality constrained optimization[J]. Math. Programming, 1991, 49: 189-211

[8] 简金宝. 非线性不等式约束最优化快速收敛的可行信赖域算法[J]. 计算数学, 2002, 24(3): 273-282

[9] 简金宝, 张可村. 不等式约束最优化一个具有强收敛性的强次可行方向法[J]. 西安交通大学学报, 1999, 33(8): 319-331

编 辑 孙晓丹