低渗气藏非线形方程新模型的适定性

吴小庆[1]，杜 宁[2]，钟守铭[3]

(1. 西南石油学院 成都 610500; 2. 西华师范大学经济系 四川 南充 637000; 3. 电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】研究了低渗透气藏中气体滑脱效应问题，利用气体滑脱现象对气测渗透率的影响，建立了低渗透多孔介质气体渗流规律的非线性抛物型偏微分方程、非线性边界条件的数学模型，论证了其适定性，得到了该模型解的存在、唯一及稳定的理论证明，为数值计算奠定了基础。

关 键 词 低渗透; 滑脱; 偏微分方程; 适定性

中图分类号 O175.21　　文献标识码 A

Well Posed of New Model for Nonlinear Equation of Flow in Low Permeability Gas Reservoirs

Wu Xiaoqing[1]，Du Ning[2]，Zhong Shouming[3]

(1. Southwest Petroleum Institute Chengdu 610050; 2. Economic Department of China West Normal University Sichuan Nanchong 637000; 3. School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, the effect of gas slippage in low permeation gas reservoirs is researched. Firstly, as the phenomenon of gas slippage has effected to the rate of permeation in gas measure, the mathematical model of nonlinear parabolic partial differential equation which reflects the rule of low permeation porous medium gas permeance is built according to the effect. Then the well posed of the solution to the nonlinear partial differential equation model in the condition of nonlinear boundary is analyzed in mathematical way. We also theoretically prove the existence, unique and stability of the solution to the model. Those results build the foundation for numerical calculation.

Key words low-permeability; slippage; partial differential equation; posed

低渗透气藏具有常规气藏不具备的许多特殊性，岩层致密，渗透率极低，气体渗流具有滑脱效应等[1~4]。在研究低渗透多孔介质中的渗流时，渗流规律偏离了达西定律，气体滑脱现象对气测渗透率有较大的影响，特别是对于低渗透岩石在低压下测定时影响更大。再考虑气体滑脱现象对气测渗透率的影响，建立了相应的研究低渗透多孔介质气体渗流规律的数学模型。其建立的数学模型是非线性偏微分方程、非线性边界条件的新模型。该模型的研究与计算具有一定难度。本文从数学上论证了数学模型解的适定性，得到了该模型解的存在、唯一及稳定的理论证明，为数值计算奠定了基础。

1 低渗透气藏数学模型的建立

考虑二维均质气藏中一口井以变产量生产，气体渗透为等温渗流且存在滑脱效应，气体为真实气体，忽略岩石弹性的影响。

下面为讨论中记区间 $I=[N_1,N_2], 0<N_1<N_2<\infty$；记 $H_T=\{(r,t)|r_w<r<R, 0<t\leq T\}$，$H_T$ 的侧边和底边统称为 H_T 的抛物边界 G。在问题的假设下，由运动方程、状态方程、质量守恒方程，即可得

收稿日期：2002－11－13
作者简介：吴小庆(1949－)，男，教授，主要从事偏微分方程的理论及应用方面的研究.

$$\frac{k_\infty}{f}\nabla\cdot\left[\frac{p}{Z(p)m_g(p)}(1+\frac{b(p)}{p})\nabla p\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{Z(p)}\right] \tag{1}$$

化简后得

$$\frac{\partial p}{\partial t}=A(p)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial p}{\partial r})+B(p)(\frac{\partial p}{\partial r})^2 \tag{2}$$

$$A(p)=\frac{k_\infty}{f}\frac{[p+b(p)]Z(p)}{[Z(p)-pZ'(p)]m_g(p)} \tag{3}$$

$$B(p)=\frac{k_\infty}{f}\left[\frac{1}{m_g(p)}+\frac{b'(p)Z(p)-b(p)Z'(p)}{m_g(p)(Z(p)-pZ'(p))}-\frac{(p+b(p))Z(p)m_g'(p)}{m_g^2(p)(Z(p)-pZ'(p))}\right] \tag{4}$$

根据假设还可以添加式(2)**的定解条件，构成如下非线性偏微分方程的新模型**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial t}=A(p)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial p}{\partial r})+B(p)(\dfrac{\partial p}{\partial r})^2 & (r,t)\in H\\ p\big|_{t=0}=p_i & r_v<r<R\\ \dfrac{1}{m_g(p)}\left[1+\dfrac{b(p)}{p}\right]\dfrac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=r_v}=Q(t) & 0<t<\infty\\ p\big|_{r=R}=p_i & 0<t<\infty\end{cases} \tag{5}$$

式中　$H=\{(r,t)|r_v<r<R,\ 0<t<\infty\}$，$Q(t)=q(t)B_g/2\pi k_\infty hr_v$，$k_\infty$ **为岩石绝对渗透率，**p **为气藏压力，**m_g **为天然气粘度，**f **为孔隙度，无因次；**b **为滑脱因子，**t **为生产时间，**r **为径向距离，**R **为气藏半径，**r_v **为井半径，**$q(t)$**为产量，**B_g **为体积系数。**

2　数学模型的适定性

由运动方程、状态方程即有

$$0<v_1\le A(s)\le v_2 \qquad s\in I \tag{6}$$

式中　v_1,v_2 **均为正常数。**

定理 1　**假设** $Q(t)\in C^1[0,T]$，**且** $Q(t)>0, Z(s)$、$m_g(s)$、$b(s)\in C^{2+a}(I)$，**若式**(5)**存在解** $p=p(r,t)\in C^{2+a,1+\frac{a}{2}}(\overline{H}_T)$ **且** $N_1\le p\le p_i$，**则解必唯一，且连续依赖定解数据，**a,N_1**为常数，满足**$0<a<1,\ N_1>0$。

证　**设**u、$v\in C^{2+a,1+\frac{a}{2}}(\overline{H}_T),\ N_1\le u$、$v\le p_i$，**且分别满足如下问题**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=A(u)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial u}{\partial r})+B(u)(\dfrac{\partial u}{\partial r})^2 & (r,t)\in H_T\\ u\big|_{t=0}=p_i & r_v<r<R\\ \dfrac{1}{m_g(u)}\left[1+\dfrac{b(u)}{u}\right]\dfrac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_v}=Q(t) & 0<t<T\\ u\big|_{r=R}=p_i & 0<t<T\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=A(v)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial v}{\partial r})+B(v)(\dfrac{\partial v}{\partial r})^2 & (r,t)\in H_T\\ v\big|_{t=0}=p_i-e_1(r) & r_v<r<R\\ \dfrac{1}{m_g(v)}\left[1+\dfrac{b(v)}{v}\right]\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=r_v}=Q(t)-e_2(t) & \\ v\big|_{r=R}=p_i-e_3(t) & \end{cases} \tag{8}$$

式中　$e_1(r)$ **在**$[r_w,R]$**连续，**$e_2(t),e_3(t)$ **在**$[0,T]$**连续。**

令 $U(r,t)=u(r,t)-v(r,t),(r,t)\in\overline{H}_T$，于是有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}=A(u)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial U}{\partial r})+b(r,t)U+c(r,t)\dfrac{\partial U}{\partial r}+d(r,t)(\dfrac{\partial U}{\partial r})^2 & (r,t)\in H_T\\ U\big|_{t=0}=e_1(r) & r_v<r<R\\ \left[\dfrac{1}{m_g(u)}(1+\dfrac{b(u)}{u})\dfrac{\partial W}{\partial r}+G(r,t)W\right]\Bigg|_{r=r_v}=e_2(t) & 0<t<T\\ U\big|_{r=R}=e_3(t) & 0<t<T\end{cases}\tag{9}$$

式中 $b(r,t)=\dfrac{A(u)-A(v)}{u-v}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial v}{\partial r})+\dfrac{B(u)-B(v)}{u-v}(\dfrac{\partial v}{\partial r})^2$，由中值定理，存在 $I\times I$ 到 I 的函数 $p_A(u,v)$、$p_B(u,v)$、$p_b(u,v)$ 使

$$b(r,t)=A'(p_A(u,v))\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial v}{\partial r})+B'(p_B(u,v))(\frac{\partial v}{\partial r})^2\tag{10}$$

$$c(r,t)=2B(u)\frac{\partial v}{\partial r}\tag{11}$$

$$d(r,t)=B(u)\tag{12}$$

$$G(r,t)=\left[\frac{-m_g'(s)}{m_g^2(s)}(1+\frac{b(s)}{s})+\frac{b'(s)-b(s)}{s^2m_g(s)}\right]\Bigg|_{s=p_b(u,v)\frac{\partial v}{\partial r}}\tag{13}$$

由 $A(s)$、$B(s)$、u、v 的光滑性，易知 b、c、d、$G\in C^{a,\frac{a}{2}}(\overline{H}_T)$，且有 $b(r,t)<b_0$，b_0 为一正常数，由式(8)中第三式及式(13)有 $G(r_v,t)<0,\quad 0<t<T$。令 $U=W\mathrm{e}^{b_0t}$，则 W 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial t}=A(u)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial W}{\partial r})+(b(r,t)-b_0)W+c(r,t)\dfrac{\partial W}{\partial r}+d(r,t)\mathrm{e}^{b_0t}(\dfrac{\partial W}{\partial r})^2 & (r,t)\in H_T\\ W\big|_{t=0}=e_1(r) & r_v<r<R\\ \left[\dfrac{1}{m_g(u)}(1+\dfrac{b(u)}{u})\dfrac{\partial W}{\partial r}+G(r,t)W\right]\Bigg|_{r=r_v}=e_2(t)\mathrm{e}^{-b_0t} & 0<t<T\\ W\big|_{r=R}=e_3(t)\mathrm{e}^{-b_0t} & 0<t<T\end{cases}$$

记 $G(r_w,t)=-a(t)$，则 $a(t)\geq a_0>0$。又记

$$N=\max\left\{\frac{1}{a_0}\max_{[0,T]}|e_2(t)|\ ,\ \max_{[0,T]}|e_3(t)|\ ,\ \max_{[r_w,R]}|e_1(r)|\right\}\tag{14}$$

令 $X(r,t)=N\pm W(r,t)$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial t}=A(u)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial X}{\partial r})+(b(r,t)-b_0)(X-N)+c(r,t)\dfrac{\partial X}{\partial r}\pm d(r,t)\mathrm{e}^{b_0t}(\dfrac{\partial X}{\partial r})^2\\ X\big|_{t=0}\geq 0\\ \left[\dfrac{1}{m_g(u)}(1+\dfrac{b(u)}{u})\dfrac{\partial X}{\partial r}-a(t)X\right]\Bigg|_{r=r_w}\leq 0\\ X\big|_{r=R}\geq 0\end{cases}\tag{15}$$

由于 X 在 $\overline{H}_T$ 连续，故 $\min\limits_{\overline{H}_T}X$，$\max\limits_{\overline{H}_T}X$ 皆存在。记 $\min\limits_{\overline{H}_T}X=X_0$，由极值原理即可证得 $X_0\geq 0$。故 $X(r,t)\geq 0$，$(r,t)\in\overline{H}_T$。从而 $|W|\leq N$。即知解是连续依赖于定解数据的。当 $N\to 0$，即有

$$W\equiv 0,\ u\equiv v\qquad (r,t)\in\overline{H}_T\tag{16}$$

唯一性也得证。　　证毕

定理 2　假设 $Q\in C^1[0,T]$，且 $Q(t)>0,\ Z(s)$、$m_g(s)$、$b(s)\in C^{2+a}(I)$，则式(5)存在解

$$p = p(r,t) \in C^{2+a,1+\frac{a}{2}}(\overline{H}_T)$$

且

$$N_1 \leq p(r,t) \leq p_i\text{，}(r,t) \in (\overline{H}_T)\text{，}N_1 \text{为正常数} \tag{17}$$

证　由 $Z(s)$、$m(s)$、$b(s) \in C^{2+a}(I)$，即知 $A(s)$、$B(s) \in C^{2+a}(I)$。考虑如下线性问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_k}{\partial t} = A(p_{k-1}(r,t)+e)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial p_k}{\partial r}) + B(p_{k-1}(r,t)+e)\dfrac{\partial p_{k-1}(r,t)}{\partial r}\dfrac{\partial p_k}{\partial r} & (r,t) \in H_T \\ p_k\big|_{t=t_0} = j(r) \quad r_v < r < R\text{，}0 < t_0 < T \\ \dfrac{\partial p_k}{\partial r}\Big|_{r=r_v} = \dfrac{Q(t)p_k m_g(p_{k-1}(r,t)+e)}{p_{k-1}(r,t)+e+b(p_{k-1}(r,t)+e)}\Big|_{r=r_v} & 0<t<T \\ p_k\big|_{r=R} = p_i \quad 0<t<T \end{cases} \tag{18}$$

式中　$j \in [r_w, R]$，$0 < N \leq \min j(r) \leq \max j(r)$，$k = 1,2,\cdots$；$p_0 = p_i, (r,t) \in \overline{H}_T$；$e$ 为充分小的正数。

由数学归纳法和极值原理易证，对任意 k，式(18)存在唯一解 $p_{ke} \in C^{2+a,1+\frac{a}{2}}(\overline{H}_T)$ 且有

$$0 \leq p_{ke} \leq p_i\text{，}(r,t) \in \overline{H}_T \text{和} |p_{ke}|_{\overline{H}_T}^{2+a} \leq C\|Q(t)\|_1 \tag{19}$$

式中　C为不依赖于 k 和 e 的常数。这个估计说明解序列$\{p_{ke}\}$作为 $C^{2,1}(\overline{H}_T)$ 的子集是一致有界、等度连续的。故必存在子序列当 $k \to \infty$ 时在 $C^{2,1}(\overline{H}_T)$ 中收敛于函数 $p_e(r,t) \in C^{2+a,1+\frac{a}{2}}(\overline{H}_T)$， 再由极值原理和定理1，知解是连续依赖于定解数据的，让 $e \to 0$，即得到式(5)存在解

$$p = p(r,t) \in C^{2+a,1+\frac{a}{2}}(\overline{H}_{T_0}) \tag{20}$$

且

$$N_1 \leq p(r,t) \leq p_i \qquad (r,t) \in \overline{H}_T \tag{21}$$

由延拓法得知，对于式(5)，可知式(17)成立。故由定理1、2即知式(5)是适定的。　　证毕

参　考　文　献

[1] 恰尔内著 N A. 地下水-气动力学[M]. 陈钟祥, 郎兆新译. 北京: 石油工业出版社, 1982
[2] 郭宝琦. 抛物型偏微分方程的反问题[M]. 哈尔滨: 黑龙江科学技术出版社, 1988
[3] 何更生. 油层物理[M]. 北京: 石油工业出版社, 1993
[4] 姜礼尚, 陈亚浙. 数学物理方程讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986

编　辑　刘文珍