关于图的并的严格强控制数

任庆军[1]，傅英定[2]
(1. 山东临沂师范学院数学系 山东 临沂 276005; 2. 电子科技大学应用数学学院 成都 610054)

【摘要】图的严格强控制数是图的符号控制数的推广，该文在图的符号控制数的基础上，研究了图的严格强控制数，并且决定了一些图的并的严格强控制数。通过对图的并的严格强控制数的研究，进一步得到了一些图的并的严格强控制数与图的阶数的关系。

关 键 词 严格强控制数; 图; 函数; 奇偶性
中图分类号 O157.5 文献标识码 A

On the Strict Majority Domination Number of Unions of Some Graphs

Ren Qingjun[1]，Fu Yingding[2]
(1. Deprtment of Mathematics, Linyi Teachers University of China Linyi 276005;
2. School of Applied Mathematics, UEST of China Chengdu 610054)

Abstract In this paper, the signal majority domination number of graphs is generalized to strict majority domination number of graphs. We investigated the strict majority domination number of some unions of graphs based on the signal majority domination number of graphs. According to study for strict majority domination number of some unions of graphs, we determined the strict majority domination number of some unions of graphs and discuss relation the strict majority domination number of some unions of graphs and order number of graphs.

Key words strict majority domination number; graph; function; parity

1 注 记

图的严格强控制数是图的符号控制数的推广。对于图的符号控制数，文献[1～4]已有一些结果，严格强控制数的结果却很少，本文讨论了一些图的并的严格强控制数。

本文所考虑的图均为简单无向图，未说明的术语与记号见文献[5]。

设图 $G=\{V,E\}$ ，$\bar{G}$ 表示图 G 的补图，对于 $v\in V$ ，$N[v]=\{u\mid vu\in E\}\bigcup\{v\}$ 称为 v 的闭邻域，函数 $f:V\to\{-1,1\}$ ，记 f 的权为 $f(V)=\sum_{v\in V}f(v)$ ，且记 $f[v]=\sum_{u\in N[v]}f(u)$ 。

定义1 若函数 $f:V\to\{-1,1\}$ ，使得 V 中多于一半的顶点 v 有 $f[v]\geq 1$ ，则称 f 为 G 的 V 上的严格强控制函数，$smaj(G)=\min\{f(V)\mid f\text{为}G\text{上严格强制函数}\}$ 称为图 G 的严格强控制数[6]。

2 图的并的严格强控制数

定理 1 整数 $n>m\geq 1$ ，G 是 m 阶图且 $H=K_n\bigcup G$ ，则 $smaj(H)=\begin{cases}1-m, & n\text{为奇数}\\ 2-m, & n\text{为偶数}\end{cases}$。

收稿日期：2004 – 03 – 02
基金项目：山东省教育科技计划项目(J01P51)
作者简介：任庆军(1962 –)，男，副教授，主要从事图论与应用方面的研究.

证 首先，设V,V_n,V_m分别是H,K_n,G的顶点集，设f是满足$f(V)=smaj(H)$的严格强控制函数。由于$n>m$，由鸽巢原理，必有顶点$v\in V_n$使得$f[v]\geq 1$而$smaj(H)=f(V)=f[v]+f(V_m)\geq 1-m$。又$f(V)$与$|V|=m+n$的奇偶性相同，故有

$$smaj(H)\geq\begin{cases}1-m & n\text{为奇数}\\ 2-m & n\text{为偶数}\end{cases}$$

其次，定义V上的函数

$$f(v)=\begin{cases}1 & V_n\text{中}[(n+1)/2]\text{个顶点}\\ -1 & \text{其他}\end{cases}$$

因为对V_n中的任一顶点v，有$f[v]\geq 1$，故f是H的严格强控制函数。而又$f(V)=\begin{cases}1-m, & n\text{为奇数}\\ 2-m, & n\text{为偶数}\end{cases}$，因而有$smaj(H)\leq\begin{cases}1-m, & n\text{为奇数}\\ 2-m, & n\text{为偶数}\end{cases}$，综上便得$smaj(H)=\begin{cases}1-m, & n\text{为奇数}\\ 2-m, & n\text{为偶数}\end{cases}$。 证毕

定理 2 $smaj(\bar{K}_n\cup K)=\begin{cases}3-n, & n\text{为奇数}\\ 4-n, & n\text{为偶数}\end{cases}$。

证 设$G=\bar{K}_n\cup K$，$V,\bar{V}_n$与V_n'分别为$G,K_n,\bar{K}_n$的顶点集。一方面，定义G的V上的函数

$$f(V)=\begin{cases}1 & V_n\text{中的}[(n+1)/2]\text{个顶点}\\ 1 & V_n'\text{一个顶点}\\ -1 & \text{否则}\end{cases}$$

容易看出f是G的一个严格强控制函数，且有$smaj(G)\leq f(V)=\begin{cases}3-n, & n\text{为奇数}\\ 4-n, & n\text{为偶数}\end{cases}$。

另一方面，设f是使得$f(V)=smaj(G)$的G的严格强控制函数，则在V_n中至少有一顶点v_1使得，$f[v_1]\geq 1$且V_n'中至少有一顶点v_1'使得$f(v_1')=1$，故$smaj(G)=f(V)=f[v_1]+f(V_n')\geq 1+1-(n-1)=3-n$。而又$smaj(G)=f(V)$与$|V|=2n$有相同的奇偶性，故有

$$smaj(G)\geq\begin{cases}3-n & n\text{为奇数}\\ 4-n & n\text{为偶数}\end{cases}$$

综上两方面便有定理结论。 证毕

定理 3 整数$m>n\geq 2$，$smaj(\bar{K}_m\cup K_n)=\begin{cases}2-n, & m\text{为偶数，}n\text{为奇数}\\ 3-n, & m\text{为奇数}\\ 4-n, & m,\ n\text{均为偶数}\end{cases}$。

证 设$G=\bar{K}_m\cup K_n$，V，V_m，V_n分别为G，$\bar{K}_{mn}$，K_n的顶点集。首先，定义V上的函数

$$f(V)=\begin{cases}1 & V_n\text{中的}[(n+1)/2]\text{个顶点}\\ 1 & V_m\text{中的}[(m-n+1)/2]\text{个顶点}\\ -1 & \text{否则}\end{cases}$$

易验证f是G的严格强控制函数，且

$$smaj(G)\leq f(V)=\begin{cases}2-n & m\text{为偶数，}n\text{为奇数}\\ 3-n & m\text{为奇数}\\ 4-n & m,\ n\text{均为偶数}\end{cases}$$

其次，设f是使得$f(V)=smaj(G)$的G的严格强控制函数。

如果存在$v_1\in V_n$使得$f[v_1]\geq 1$，又v_n中所有的顶点都有相同的闭邻域，故对V_n中所有的顶点v都有$f[v]\geq 1$，而此时亦至少有V_m的$[(m-n+1)/2]$个顶点v使得$f(v)=1$，因而有

$$smaj(G)=f(V)\geq\begin{cases}2-n & m\text{为偶数},\ n\text{为奇数}\\ 3-n & m\text{为奇数}\\ 4-n & m,n\text{均为偶数}\end{cases}$$

如果V_n中没有顶点v使得$f[v]\geq 1$，则V_m中必须至少有$[(m-n+1)/2]$个顶点v，则$f(v)=1$，则有

$$smaj(G)=f(V)=f(V_m)+f(V_n)\geq[(m-n+1)/2]-(m-[(m-n+1)/2])-n=$$

$$2[(m+n+1)/2]-m-n\geq\begin{cases}2-n & m\text{为偶数},\ n\text{为奇数}\\ 3-n & m\text{为奇数}\\ 4-n & m,n\text{均为偶数}\end{cases}$$

综上便有定理结论。 证毕

引理 1[6] $smaj(K_n)=\begin{cases}1, & n\text{为奇数}\\ 2, & n\text{为偶数}\end{cases}$。用$lK_n$表示$l$个$K_n$的并。

定理 4 $smaj(2K_n)=\begin{cases}2, & n\text{为奇数}\\ 4, & n\text{为偶数}\end{cases}$。

证 设f是$2K_n$的严格强控制函数，则$2K_n$中的每个分支各至少有一个顶点v使$f[v]\geq 1$，又$2K_n$的每个分支都是完全图K_n，因而每个分支的每个顶点都有相同闭邻域，故$2K_n$的每个分支的权重都为正，由引理1得每个分支的正权重的最小值为1(n为奇数)或2(n为偶数)[6]，故

$$smaj(2K_n)=\begin{cases}2 & n\text{为奇数}\\ 4 & n\text{为偶数}\end{cases}$$ 证毕

用定理4同样的方法不难得到下面的定理。

定理 5 对正整数l,n且$l\geq 3$，则

$$smaj(lK_n)=\begin{cases}[l/2]-[l/2]n & l,n\text{均为奇数}\\ (l/2+1)-(l/2-1)n & l\text{为偶数},n\text{为奇数}\\ (l+1)-[l/2]n & l\text{为奇数},n\text{为偶数}\\ (l+2)-(l/2-1)n & l,n\text{均为偶数}\end{cases}$$

参 考 文 献

[1] Dunber J. Signed domination in graph, graph theory, combinatorics, and applications[M]. New York: Wiley, 1995. 311-322

[2] Zhang Z, Zu B, Li Y, *et al*. A note on the lower bounds of signed domination number of a graph[J]. Discrete Math, 1999, 195: 295-298

[3] Zu B. On signed edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Math, 2001, 239: 179-189

[4] CocKayne E J, Mynhardt C. On a generalization of signed dominating function of graphs[J]. Arscombin, 1996, 43: 234-245

[5] Bondy J A, Marty O S R. Graph theory with application[M]. New York: Macmillan, Landon and Elsevier, 1976

[6] Henning M A, Hind H R. Strict majority functions on graphs[J]. J Gaph Theory, 1998, 28: 49-56

编 辑 漆 蓉