第 33 卷 第 4 期 2004 年 8 月
电 子 科 技 大 学 学 报 Journal of UEST of China
Vol.33 No.4 Aug. 2004

相对论Birkhoff系统的积分不变量

顾书龙[1]，张宏彬[2]

(1. 巢湖学院物理系 安徽 巢湖 238000; 2. 上海大学上海市应用数学和力学研究所 上海 200072)

【摘要】研究相对论Birkhoff系统的积分与积分不变量的构造,建立相对论Birkhoff系统的等时变分方程和非等时变分方程，由此证明：由已知系统的一个第一积分，可以构造系统的一个积分不变量.并给出了它的逆定理。

关 键 词 分析力学; 相对论Birkhoff系统; 第一积分; 积分不变量

中图分类号 O320 文献标识码 A

Integral Invariants of Relativistic Birkhoff Systems

Gu Shulong[1]，Zhang Hongbin[2]

(1. Department of Physics, Chaohu College An hui Chaohu 238000;

2. Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University Shanghai 200072)

Abstract The relativistic integral invariants of Birkhoffian systems are studied. The simultaneous variant equations and non-simultaneous variant equations to the relativistic Birkhoffian systems are constructed respectively. we demonstrate a theorem, i.e. by virtue of a given first integral of the system, a integral invariant of system may be constructed, and further give it’s inverse theorem.

Key words analytical mechanics; relativistic Birkhoffian systems; first integral; integral invariant

力学系统的第一积分与积分不变量是运动方程积分理论的重要内容，而且第一积分与积分不变量之间有着密切联系。文献[1]对于完整系统提出：已知一个第一积分可以确定一个积分不变量。文献[2, 3]中分别将文献[1]结论推广到非完整系统和Birkhoff系统，文献[4, 5]分别研究了非完整系统和Birkhoff系统的非等时变分方程与积分不变量的构造。本文将进一步研究相对论Birkhoff系统的第一积分与积分不变量的构造。

1 相对论Birkhoff系统的等时变分方程与积分不变量的构造

相对论Birkhoff方程的一般形式为[6]

$$W_{mn}^{*}\dot{a}^{n}-\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{m}}-\frac{\partial\tilde{R}_{m}^{*}}{\partial t}=0 \qquad m,n=1,2,\cdots,2n \tag{1}$$

若相对论Birkhoff方程(1)非奇异，即设 $\det(W_{mn}^{*})\neq 0$,式(1)可写成

$$\dot{a}^{m}=W^{*mn}\left(\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{n}}+\frac{\partial\tilde{R}_{n}^{*}}{\partial t}\right) \qquad m,n=1,2,\cdots,2n \tag{2}$$

用 $a^{m}+da^{m}$ 代替式(2)中的 a^{m} ，并忽略 $d\,a^{m}$ 的二阶及以上小量，得到

收稿日期：2003 – 10 – 23
基金项目：安徽省教育厅自然科学资助项目(2002kj230; 2004kj294)
作者简介：顾书龙(1958 –)，男，副教授，主要从事光学与力学方面的研究.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(da^{m}\right)=W^{*mn}\left\{\frac{\partial^{2}\tilde{B}^{*}}{\partial a^{n}\partial a^{r}}+\frac{\partial^{2}\tilde{R}_{n}^{*}}{\partial t\partial a^{r}}-\frac{\partial W_{nc}^{*}}{\partial a^{r}}W^{*cs}\left(\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{s}}+\frac{\partial\tilde{R}_{s}^{*}}{\partial t}\right)\right\}da^{r}\qquad m,n,r,\chi,s=1,2,\cdots,2n \tag{3}$$

其中

$$W^{*mn}W_{nr}^{*}=d_{mr} \tag{4}$$

称式(3)**为相对论**Birkhoff**式**(2)**的等时变分方程。**

研究由系统的第一积分来构造一类基于等时变分的积分不变量。假设相对论 Birkhoff**系统式**(1)**有一个第一积分，形如**

$$F^{*}(m,t,a)=\mathrm{const} \tag{5}$$

证明　对于时间任意可微无限小函数da^{m}**，表达式**

$$I=\int\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}da^{m}\qquad m=1,2,\cdots,2n \tag{6}$$

是系统的一个积分不变量，其中$\tilde{F}^{*}=\tilde{F}^{*}(t,a)=F^{*}[m(t,a),t,a]$**。**

实际上，利用相对论 Birkhoff**系统的运动式**(1)**，等时变分方程式**(4)**、**(5)**，有**

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}da^{m}\right)=\int\left[\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}da^{m}+\left(\frac{\partial^{2}\tilde{F}^{*}}{\partial t\partial a^{m}}+\frac{\partial^{2}\tilde{F}^{*}}{\partial a^{n}\partial a^{m}}\dot{a}^{n}\right)da^{m}\right]=$$

$$\int\left\{\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}W^{*mn}\left[\frac{\partial^{2}\tilde{B}^{*}}{\partial a^{n}\partial a^{r}}+\frac{\partial^{2}\tilde{R}_{n}^{*}}{\partial t\partial a^{r}}-\frac{\partial W_{nc}^{*}}{\partial a^{r}}W^{*cs}\left(\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{s}}-\frac{\partial\tilde{R}_{s}^{*}}{\partial t}\right)\right]da^{r}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial^{2}\tilde{F}^{*}}{\partial t\partial a^{r}}da^{r}+\frac{\partial^{2}\tilde{F}^{*}}{\partial a^{n}\partial a^{r}}W^{*nc}\left(\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{c}}+\frac{\partial\tilde{R}_{c}^{*}}{\partial t}\right)da^{r}\right\}\qquad m,n,r,\chi,s=1,2,\cdots,2n \tag{7}$$

因为$\tilde{F}^{*}$**是相对论**Birkhoff**系统式**(1)**的一个第一积分，因此有**

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{F}^{*}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}W^{*mn}\left(\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{n}}+\frac{\partial\tilde{R}_{n}^{*}}{\partial t}\right)=0\qquad m,n=1,2,\cdots,2n \tag{8}$$

将式(8)**对**a^{r}**求偏导数，得**

$$\frac{\partial^{2}\tilde{F}^{*}}{\partial a^{r}\partial t}+\frac{\partial^{2}\tilde{F}^{*}}{\partial a^{r}\partial a^{m}}W^{*mn}\left(\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{n}}+\frac{\partial\tilde{R}_{n}^{*}}{\partial t}\right)+\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}\frac{\partial W^{*mn}}{\partial a^{r}}\left(\frac{\partial\tilde{B}^{*}}{\partial a^{n}}+\frac{\partial\tilde{R}_{n}^{*}}{\partial t}\right)+$$

$$\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}W^{*mn}\left(\frac{\partial^{2}\tilde{B}^{*}}{\partial a^{r}\partial a^{n}}+\frac{\partial^{2}\tilde{R}_{n}^{*}}{\partial a^{r}\partial t}\right)=0\qquad m,n,r=1,2,\cdots,2n \tag{9}$$

将式(4)**两端对**a^{r}**求偏导数，得**

$$\frac{\partial W^{*mn}}{\partial a^{r}}W_{nc}^{*}+W^{*mn}\frac{\partial W_{nc}^{*}}{\partial a^{r}}=0\qquad m,n,r,\chi=1,2,\cdots,2n \tag{10}$$

将式(10)**代入式**(7)**并利用式**(9)**得**

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\tilde{F}^{*}}{\partial a^{m}}da^{m}\right)=0\qquad m=1,2,\cdots,2n \tag{11}$$

于是有如下定理：

定理 1　如果相对论 Birkhoff**系统式**(1)**有形如式**(5)**的一个第一积分，则表达式**(6)**是该系统的一个积分不变量。**

证明　定理1**的逆定理也成立，即有：**

定理 2　如果相对论 Birkhoff**系统式**(1)**有形如式**(6)**的一个积分不变量，那么该系统一定有一个形如式**(5)**的第一积分。**

2　相对论Birkhoff系统的非等时变分方程与积分不变量的构造

根据非等时变分Δ和等时变分d 的关系式，有

$$\Delta(a^m) = da^m + \dot{a}^m \Delta t \qquad m = 1,2,\cdots,2n \tag{12}$$

在式(2)中，用$a^m + \Delta a^m$，$t + \Delta t$ 分别代替a^m，t展开后并忽略Δa^m、Δt 的二阶及以上的小量，有

$$\dot{a}^m + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta a^m) - \dot{a}^m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) = W^{*mn}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^n} + \frac{\partial \tilde{R}_n^*}{\partial t}\right) + \left[W^{*mn}\left(\frac{\partial^2 \tilde{B}^*}{\partial a^n \partial a^r} + \frac{\partial^2 \tilde{R}_n^*}{\partial t \partial a^r}\right) + \frac{\partial W^{*mn}}{\partial a^r}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^n} + \frac{\partial \tilde{R}_n^*}{\partial t}\right)\right]\Delta a^r + \left[W^{*mn}\left(\frac{\partial^2 \tilde{B}^*}{\partial a^n \partial t} + \frac{\partial^2 \tilde{R}_n^*}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial W^{*mn}}{\partial t}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^n} + \frac{\partial \tilde{R}_n^*}{\partial t}\right)\right]\Delta t \qquad m, n, r = 1,2,\cdots,2n \tag{13}$$

考虑到式(2)，由式(13)便得相对论Birkhoff系统的非等时变分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta a^m) = W^{*mn}\left\{\left[\frac{\partial^2 \tilde{B}^*}{\partial a^n \partial a^r} + \frac{\partial^2 \tilde{R}_n^*}{\partial t \partial a^r} - \frac{\partial W_{nc}^*}{\partial a^r} W^{*cs}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^s} + \frac{\partial \tilde{R}_s^*}{\partial t}\right)\right]\Delta a^r + \left[\frac{\partial^2 \tilde{B}^*}{\partial a^n \partial t} + \frac{\partial^2 \tilde{R}_n^*}{\partial t^2} - \frac{\partial W_{nc}^*}{\partial t} W^{*cs} \times \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^s} + \frac{\partial \tilde{R}_s^*}{\partial t}\right)\right]\Delta t + \left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^n} + \frac{\partial \tilde{R}_n^*}{\partial t}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\right\} \qquad m, n, r, x, s = 1,2,\cdots,2n \tag{14}$$

式(14)为相对论Birkhoff系统式(1)的非等时变分方程。

下面由系统的第一积分来构造基于非等时变分的积分不变量。假设相对论Birkhoff系统式(1)有形如式(5)的第一积分，可以证明：对于时间的任意可微无限小函数Δt，Δa^m，表达式

$$I = \int\left(\frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial a^m}\Delta a^m + \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial t}\Delta t\right) \qquad m = 1,2,\cdots,2n \tag{15}$$

是系统的一个积分不变量，其中$\tilde{\Phi}^* = \tilde{\Phi}^*(t,a) = \Phi^*[m(t,a),t,a]$。

利用相对论Birkhoff系统的运动微分方程式(1)，非等时变分方程式(14)、(4)，有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \int\left\{\frac{\partial}{\partial a^m}\left[\frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial a^r} W^{*rs}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^s} + \frac{\partial \tilde{R}_s^*}{\partial t}\right) + \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial t}\right]\Delta a^m + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial a^r} W^{*rs}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^s} + \frac{\partial \tilde{R}_s^*}{\partial t}\right) + \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial t}\right]\Delta t + \left[\frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial a^r} W^{*rs}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^s} - \frac{\partial \tilde{R}_s^*}{\partial t}\right) + \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial t}\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t)\right\} \qquad m, r, s = 1, 2, \cdots, 2n \tag{16}$$

因为$\tilde{F}^*$是相对论Birkhoff式(1)的一个第一积分，因此有

$$\frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial a^r} W^{*rs}\left(\frac{\partial \tilde{B}^*}{\partial a^s} + \frac{\partial \tilde{R}_s^*}{\partial t}\right) + \frac{\partial \tilde{F}^*}{\partial t} = 0 \qquad r, s = 1,2,\cdots,2n \tag{17}$$

将式(17)代入式(16)，可以得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{18}$$

于是有如下定理：

定理 3　如果相对论Birkhoff式(1)有形如式(5)的一个第一积分，则式(15)是该系统的一个积分不变量。

容易证明，定理3的逆定理也成立，即有：

定理 4　如果相对论Birkhoff系统式(1)有形如式(15)的一个积分不变量，那么该系统一定有一个形如式(5)的第一积分。

当取$\Delta t = 0$，式(14)成为相对论Birkhoff式(1)的等时变分方程。所以定理1、2是定理3、4的特例。

参 考 文 献

[1] Whittaker E X. A treatise on analytical dynamics of particles and rigid bodies[M]. Fourth Edition. Cambridge: Cambridge at the University Press, 1952. 267-269

[2] 梅凤翔. 非完整系统的第一积分与其变分方程特解的联系[J]. 力学学报, 1991, 23(3): 366-370

[3] 梅凤翔, 吴惠彬. Birkhoff系统的第一积分与积分不变量[J]. 科学通报, 1999, 44(21): 2 262-2 264

[4] 张解放. 非完整系统的非等时变分方程与积分不变量的构造[J]. 科学通报, 1992, 37(7): 661-664

[5] Zhang Yi. Construction of the solution of variational equations for constrained birkhoffian systems[J]. Chinese Physics, 2002, 11(5): 437-440

[6] 傅景礼, 王新明. 相对论性Birkhoff系统的Lie对称性和守恒量[J]. 物理学报, 2000, 49(6): 1 023-1 026

编 辑 孙晓丹

(上接第463页)

参 考 文 献

[1] Bluhm R, Kostelecky V A, Russel N. CPT and lorentz tests in hydrogen and anti-hydrogen[J]. Phys. Rev. Lett, 1999, 82(11): 2 254-2 257

[2] Eikema K S E, Walz J, Hänsch T W. Continuous wave coherent lyman-radiation[J]. Phys.Rev.Lett., 1999, 83(19): 3 828-3 831

[3] Holzscheiter M H, Charlton M. Ultra-low energy antihydrogen[J]. Rep. Prog. Phys., 1999, 62(1): 1-55

[4] 于长丰. 逻辑力学原理[J]. 纺织高校基础科学学报, 1999, 12(3): 191-262

[5] 于长丰. 强子口袋半径的一种计算方法[J]. 纺织高校基础科学学报, 2001, 9(3): 262-263

[6] 曾谨言. 量子力学(第二卷)[M]. 北京: 科学出版社, 2001. 452-456

[7] Holland P R. The quantum theory of motion[M]. Cambridge shire: Cambridge University Press, 1999. 153-156

[8] 陈昌远, 沈宏兰. 最弱受约束电子势模型散射态的精确解[J]. 物理学报, 1997, 46(6): 1 055

编 辑 孙晓丹