

高阶非线性控制系统相平面的实现

方 斌, 张德祥

(安徽大学自动化系 合肥 230039)

【摘要】提了基于二阶线性系统等倾线法绘制相平面原理, 实现了高阶非线性控制系统相平面相轨迹的作图算法。该算法与解析法相比具有计算简单、结果精度高的特点, 其作图可推广到非线性微分方程的求解。实例结果证明算法是有效的。

关键词 相平面; 相轨迹; 等倾线; 高阶非线性

中图分类号 TP13 **文献标识码** A

Realization of Phase Plane for Higher Order Nonlinear Control System

Fang Bin Zhang Dexiang

(Department of Automation of Anhui University Hefei 230039 China)

Abstract In this paper a new concept of phase contrail of phase plane for higher order nonlinear control system based on isoclines method of second-order linear system is proposed. It features simplicity in calculation, higher precision in consequence compared with analytic method. It can be applied generalized to solve non-linear difference equation. The results of example show that algorithm is effective.

Key words phase plane; phase contrail; isoclinals line; higher order nonlinear

非线性在实际控制系统中大量存在, 当系统中非线性因素较强时, 只能用非线性代数方程或非线性微分方程描述, 但对于非线性系统的研究并不需求得其时域响应的精确解, 只通过求取系统的运动形式, 以解决稳定性问题为中心, 对系统实施有效的控制。一般情况下, 高阶非线性微分方程只能用工程上适用的近似方法, 如相平面法等图解法来解决。但相平面法只适用于一阶、二阶线性环节组合而成的非线性系统^[1, 2], 对于高阶线性环节组合而成的非线性系统则较困难^[3]。

本文提出利用等倾线法原理, 多步递推求取 $(d^m X/dt^m, d^{m+1} X/dt^{m+1})$ 相平面上相轨迹 $(m = n - 2, n - 3, \dots, 3, 2, 1)$ 点, 最终求取 $(X, dX/dt)$ 相平面上相轨迹, 从而实现高阶非线性系统相平面作图。

1 相平面法概述

相平面法是通过图解法, 将一阶和二阶系统的运动过程转化为位置和速度平面上的相轨迹, 从而比较直观准确地反映系统的稳定性, 平衡状态和稳定精度, 以及初始条件及参数对系统运动的影响。等倾线法是求取相轨迹的一种常用的作图方法, 其基本思想是先确定相轨迹的等倾线, 绘出相轨迹的切线方向场, 然后从初始条件出发, 沿方向场逐步绘制相轨迹, 相轨迹的走向是按顺时针方向。

收稿日期: 2003-04-15

基金项目: 安徽省教育基金资助项目(2001kj005)

作者简介: 方 斌(1966-), 男, 博士, 教授, 主要从事控制理论及应用、非线性理论、电能质量检测与控制方面的研究。

设二阶线性系统的微分方程为： $d^2x/dt^2 = f(x, dx/dt)$ ，则相轨迹微分方程为： $q = (d^2x/dt^2)/(dx/dt) = d(dx/dt)/dx = f(x, dx/dt)/(dx/dt)$ ，等倾线方程为： $dx/dt = f(x, dx/dt)/q$ 。其中 q 为相平面上相轨迹点的切线斜率。

从初始点出发沿切线方向取一小线段代替该段相轨迹，则可获得由各小线段组成的折线，最后对该折线作光滑处理，即得到所求系统的相轨迹。

2 高阶非线性相平面思想

设高阶非线性控制系统微分方程为：

$$\frac{d^n}{dt^n} x(t) + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dt} x(t) + a_n(x)x(t) = f(x)$$

式中 $a_i(x)$ 为系统的结构参数，或为常数或为 x 的函数 ($i=1, 2, \dots, n$)； $f(x)$ 为 x 的非线性函数； $x(t)$ 为 n 阶可微，且微分方程已进行首一化处理。已知初始条件 $d^i X_0/dt^i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$)；并假定 $X_0 = x_0, dX_0/dt = dx_0/dt, \dots, d^{n-1} X_0/dt^{n-1} = d^{n-1} x_0/dt^{n-1}$ 。

利用3个步骤可得到 $(X, dX/dt)$ 相平面上相轨迹：

1) 作 $(d^{n-2} X/dt^{n-2}, d^{n-1} X/dt^{n-1})$ 相平面上相轨迹，如图1a所示，图中初始点为 $(d^{n-2} x_0/dt^{n-2}, d^{n-1} x_0/dt^{n-1})$ ，记为A点。相平面上过A点和坐标原点的直线斜率为：

$$P_{n-2} = \frac{d^{n-1} x_0/dt^{n-1}}{d^{n-2} x_0/dt^{n-2}}$$

过A点相轨迹切线斜率为：

$$q_{n-2} = \frac{d(d^{n-1} x_0/dt^{n-1})}{d(d^{n-2} x_0/dt^{n-2})} = \frac{d^n x_0/dt^n}{d^{n-1} x_0/dt^{n-1}} = \frac{f(x_0) - a_n(x_0)x_0 - a_{n-1}(x_0)dx_0/dt - \dots - a_1(x_0)d^{n-1} x_0/dt^{n-1}}{d^{n-1} x_0/dt^{n-1}}$$

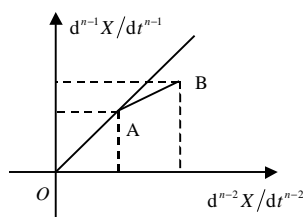
过A点作一斜率为 q_{n-2} 的短直线作为相轨迹的切线，并根据相轨迹按顺时针方向运动的特点，在短直线上取一点(如图上B点)作为相轨迹的第二点，且A、B两点的距离为步距 $h=|AB|$ (h 的大小决定相轨迹的作图精度)^[3]，由 h 及 q_{n-2} 可以得到B点的坐标 $(d^{n-2} x_1/dt^{n-2}, d^{n-1} x_1/dt^{n-1})$ ，即相轨迹上第二点的位置。

2) 作 $(d^{n-3} X/dt^{n-3}, d^{n-2} X/dt^{n-2})$ 相平面的相轨迹，起点为 $(d^{n-3} x_0/dt^{n-3}, d^{n-2} x_0/dt^{n-2})$ ，如图1b所示。设图中起始点 $(d^{n-3} x_0/dt^{n-3}, d^{n-2} x_0/dt^{n-2})$ 为C点，则过C点和坐标原点的直线斜率为：

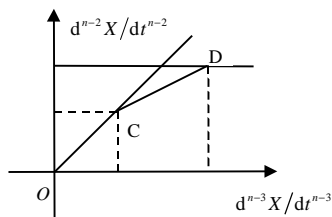
$$P_{n-3} = \frac{d^{n-2} x_0/dt^{n-2}}{d^{n-3} x_0/dt^{n-3}}$$

过C点相轨迹的切线斜率为：

$$q_{n-3} = \frac{d(d^{n-2} x_0/dt^{n-2})}{d(d^{n-3} x_0/dt^{n-3})} = \frac{d^{n-1} x_0/dt^{n-1}}{d^{n-2} x_0/dt^{n-2}} = P_{n-2}$$



(a) $(d^{n-2} X/dt^{n-2}, d^{n-1} X/dt^{n-1})$



(b) $(d^{n-3} X/dt^{n-3}, d^{n-2} X/dt^{n-2})$

图1 $(d^{n-2} X/dt^{n-2}, d^{n-1} X/dt^{n-1})$ 和 $(d^{n-3} X/dt^{n-3}, d^{n-2} X/dt^{n-2})$ 相平面

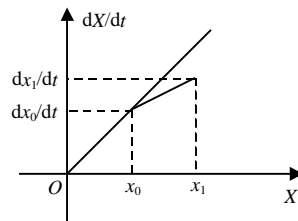


图2 $(X, dX/dt)$ 相平面

图中相轨迹的第二点纵坐标应为图1a中所求出的 $d^{n-2} x_1/dt^{n-2}$ ，利用等倾法相轨迹作图可知，相平面 $(d^{n-3} X/dt^{n-3}, d^{n-2} X/dt^{n-2})$ 上第二点(图中D点)应为过C点的相轨迹切线与 $d^{n-2} X/dt^{n-2} = d^{n-2} x_1/dt^{n-2}$ 的直线交点。由 q_{n-3} 及 $d^{n-2} x_1/dt^{n-2}$ 可得到 $d^{n-3} x_1/dt^{n-3}$ ，即确定D点坐标 $(d^{n-3} x_1/dt^{n-3}, d^{n-2} x_1/dt^{n-2})$ 。

3) 作 $(d^{n-4} X/dt^{n-4}, d^{n-3} X/dt^{n-3})$ 相平面的相轨迹，起始点为 $(d^{n-4} x_0/dt^{n-4}, d^{n-3} x_0/dt^{n-3})$ ，根据2)确定相轨

迹点的方法及求出的 $d^{n-3}x_1/dt^{n-3}$ 可得到 $(d^{n-4}X/dt^{n-4}, d^{n-3}X/dt^{n-3})$ 相平面上相轨迹的第二点坐标 $(d^{n-4}x_1/dt^{n-4}, d^{n-3}x_1/dt^{n-3})$ ，即确定 $d^{n-4}x_1/dt^{n-4}$ 值。按步骤2)、3)的方法可递推出 $d^{n-5}x_1/dt^{n-5}$ ， $d^{n-6}x_1/dt^{n-6}, \dots, dx_1/dt, x_1$ 点值。

相平面 $(X, dX/dt)$ 如图2所示。然后将 $x_1, dx_1/dt, \dots, d^{n-2}x_1/dt^{n-2}, d^{n-1}x_1/dt^{n-1}$ 作为新的起始点，根据上述方法从第一步开始求相轨迹下一点坐标 $d^{n-1}x_2/dt^{n-1}, d^{n-2}x_2/dt^{n-2}, d^{n-3}x_2/dt^{n-3}, \dots, dx_2/dt, x_2$ ，从而确定相平面 $(X, dX/dt)$ 上相轨迹的第三点。如此不断循环递推，便可用等倾线法画出高阶非线性系统 $(X, dX/dt)$ 相平面上相轨迹。

3 实例仿真

设具有饱和和非线性的控制系统如图3所示。图4分别给出了该系统初始条件为 $[1.5, 3, 1]$ ，虚线 $K=5$ 和实线 $K=2$ 时相平面 $(c, dc/dt)$ 的相轨迹。图5分别给出了该系统初始条件为 $[1.5, 3, 1]$ (实线所示) 和初始条件为 $[3.5, 3, 1]$ (虚线所示)， $K=15$ 时相平面 $(c, dc/dt)$ 的相轨迹。

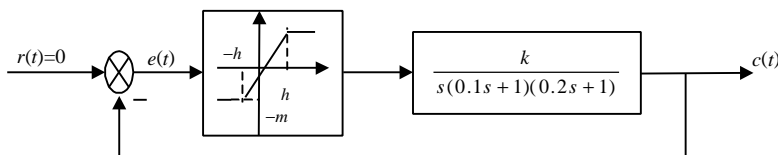


图3 具有饱和非线性特性的控制系统($h=1, m=2$)

利用描述函数法分析可知^[1]，该系统出现自振荡的临界 K 值为 7.5，当 $K < 7.5$ 时系统稳定，当 $K > 7.5$ 时系统出现自振荡，且自振荡的振幅 $A=2.5$ 。

从系统相平面的相轨迹可以看出：当 $K < 7.5$ 时(图4中线所示)，系统最终趋于稳定，稳定点为原点，并且 K 越小，稳定性越强，快速性越强；当 $K > 7.5$ 时(图5中线所示)，出现自振荡，其振幅 $A=2.5$ ，并且当初始从大于 2.5 出发，系统将沿稳定方向趋于极限环(图5中虚线所示)，当初始从小于 2.5 出发，系统将沿不稳定方向趋于极限环(图5中实线所示)，这与描述函数法分析是一致的。从而证明用本文提出的算法画高阶非线性相平面的相轨迹是正确的。

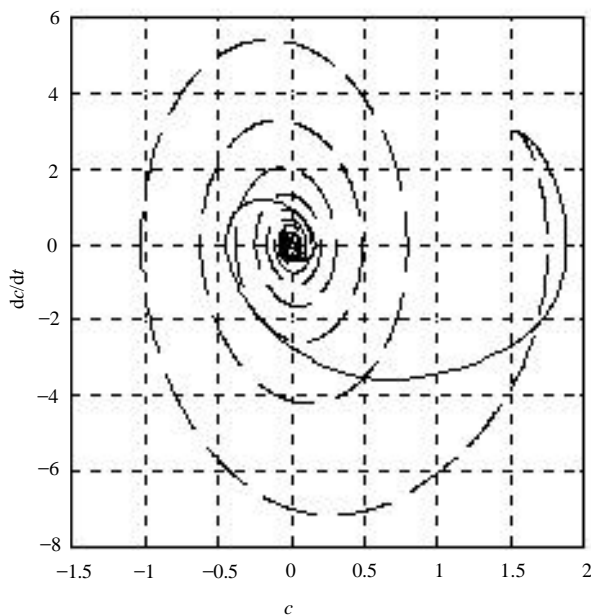


图4 系统 $K=5.2$ 时相平面 $(c, dc/dt)$

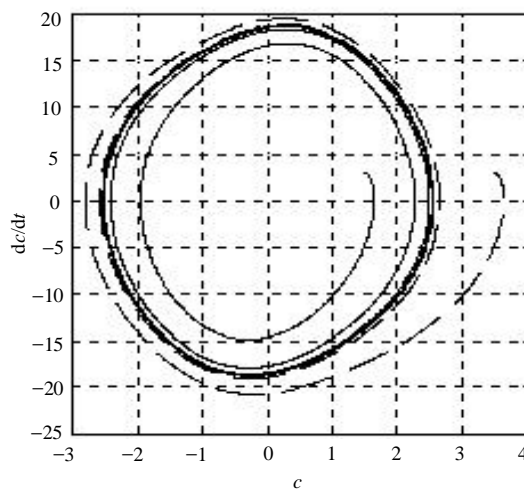


图5 系统 $K=15$ 时相平面 $(c, dc/dt)$

4 结 束 语

利用本文算法解决了高阶非线性控制系统的作图,所有的过程均无需求解微分方程,具有一定的实用价值。但非线性系统阶次越高,作图的中间步骤就越多,对于三阶、四阶或五阶系统其作图步骤适中,并能取得良好的作图效果,从而实现不解高阶微分方程而直接画出相平面的目的。为提高制图精度和制图速度,步距 h 的选择可采用变步距的方法,越接近稳定或变化幅度越小时,步距选择越小。同时也提供了一种求解高阶非线性微分方程的方法。

参 考 文 献

- [1] 胡寿松. 自动控制原理[M]. 北京: 科学出版社, 2001. 357-356
- [2] Vidyasagar M. Nonlinear systems analysis[M]. New York : Prentice-Hall, Inc, 1978. 230-234
- [3] 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计[M]. 北京: 清华大学出版社, 1996: 144-150

编 辑 漆 蓉

(上接第554页)

参 考 文 献

- [1] 陈昭栋, 舒维芬. 恒流法测定热扩散系数. 物理实验[J]. 2000, 20(1): 10-12
- [2] 施明恒. 热工实验的原理和技术[M]. 南京: 东南大学出版社, 1992. 144-146
- [3] 陈昭栋, 舒维芬. 热导率瞬态测量的数据处理[J]. 物理实验, 2000, 20(3): 6-8
- [4] 陈昭栋, 舒维芬, 陈 丕. 在瞬态自动测量仪上用脉冲法测量材料的热物理系数[J]. 物理实验, 2002, 22(10): 3-5
- [5] 沈韫元. 建筑材料热物理性能[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983. 33-46
- [6] JC275-80[S]. 北京 : 中国建筑工业出版社, 1980
- [7] 纪午生. 常用建筑材料试验手册[Z]. 北京: 中国建筑出版社, 1986, 357-358
- [8] 工程建设规范汇编21. 建筑材料技术规程[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1987. 115
- [9] 陈昭栋, 舒维芬. 热导率的非稳态测量方法及常数修正[J]. 工科物理, 1993(3): 31-33

编 辑 孙晓丹

(上接第572页)

参 考 文 献

- [1] 吴永辉, 周傲英. 规范化对象模式森林—复杂对象模式的范式[M]. 北京 : 机械工业出版社, 2002
- [2] 刘义英. 关系数据模型转换为对象数据模型的研究[J]. 哈尔滨理工大学学报, 2001, 20 (4):300-308
- [3] Bertino E, Martino L.Object-Oriented database management systems[J]. concepts and issues, IEEE Computer, 1991, 24(4) :9-18
- [4] 张家明. 关系数据库模式向对象数据库模式的转换[J]. 东南大学学报,1998, 21(4):70-74
- [5] 谷长勇, 徐志伟, 诸兴国. XML结构和关系数据库的一种形式化映射[J]. 计算机工程, 2001,20(2): 11-27
- [6] 陈文字. 利用数据库处理多个对象间的关系[J]. 电子科技大学学报. 2002, 31(3): 270-274

编 辑 徐安玉