第 33 卷 第 5 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.33 No.5
2004 年 10 月　　Journal of UEST of China　　Oct. 2004

15-谜问题的可达性判定

宋　文，伊良忠，牟行军
(西华大学计算机与数理学院　成都　610039)

【摘要】定义了15-谜问题的6个动作规则，在此基础上证明了15-谜问题解的存在性判定的充分必要条件，其充分性的证明过程是一个构造性证明方法，提供了求解15-谜问题的一个解的可实现算法；同时，对此结论进行了扩展，对于给定的一初始格局和任一目标格局，证明了初始格局可达目标格局的的充分必要条件，其结论有助于构造问题的状态空间与限界函数。这两个结论从理论上完全解决了15-谜问题，对获得最优算法提供了理论基础。

关　键　词　15-谜问题;　格局;　可达性;　算法
中图分类号　TP301.6　　文献标识码　A

Judgement of Reachability about 15-Puzzle

Song Wen，Yi Liangzhong，Mu Xingjun
(School of Computers & Mathematical-Physical Science, Xihua University　Chengdu　610039)

Abstract　Based on multiple-input-multiple-output (MIMO) scattering wireless fading channel model, a dynamic receiving and transmitting model for MIMO wireless channels is proposed in this paper, which is used for analyzing impact of mobility of transceiver antennas on spatial correlation and capacity of MIMO wireless channels. The conclusion is reached, which these effects are determined by the original positions of transceiver antennas and by their velocity. The simulation results validate this impact and show that there exists an optimum angular spread that forces spatial correlation, which decreases with increasing antenna spacing and does not consistently decrease with increasing angular spread, to reach minimum.

Key words　15-puzzle;　pattern;　reachability;　algorithm

15-谜问题(15-puzzle)是一个组合数学的问题。其算法思想有助于解决人工智能方面的一些有趣的问题，比如魔方问题等；其结果可应用于密码技术[1, 2]。该问题叙述如下：在4×4的棋盘上放有15张编了号(1,2,…,15)的牌，空格牌的编号为16，如图1a所示。对于给定的一初始格局(也称作一实例)，要求通过一系列的合法移动将初始格局转换成图1b所示的目标格局(称作复位)。移动规则是：只有将与空格邻接的牌移到空格才是合法移动。

1	3	4	15
2		5	12
7	6	11	14
8	9	10	13

(a) 一个初始格局

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

(b) 一个目标格局

图1　15谜的一些格局

15-谜是一个NP(Non-deterministic Polynmial，非确定型的多项式)难度的组合问题，4×4的棋盘可以有16!种不同的格局，复位是其中一个格局。对于给定的一个实例S_0，如果可以复位，该实例有解，否则无解。在15-谜问题的求解中，首先需要判定是否有解，也就是解的存在性判定，在有解的前提下才去

收稿日期：2003 – 12 – 05
基金项目：四川省应用基础科研基金资助项目(03226125)
作者简介：宋　文(1956 –)，男，硕士，副教授，主要从事算法设计与分析、Petri网理论与应用等方面的研究.

考虑寻求好的算法。求解15-谜这类具有NP难度的问题，常常使用回溯法、分支限界法。当使用这些方法时，需要给出问题的显式约束和隐式约束，以便于构建问题的一个实例的状态空间与限界函数，其状态空间由所有可从实例S_0到达的状态S_i构成。要想得到优化算法，缩小状态空间，给出一个好的限界函数是极为重要的，而这些都依赖于S_0是否可达S_i的判定。显然，解的存在性判定是可达性判定的特例。

引用了15-谜问题的专著中直接使用了解的存在性判定，但没有给出相关的证明[3]。本文将给出其严格的证明，其证明过程也提供了一个算法。

1　可达性判定

为了叙述方便，本文首先定义一些记号和术语：对棋盘的方格位置按从上到下，从左到右编上1～16的号码。

定义1　一个格局称为一个问题状态。初始(目标)格局称为初始(目标)状态。称图1b给出的状态为有序态。

定义2　假设a是给定的初始状态，b是一目标状态。如果由a到b存在一系列合法的移动，则称b可由a到达。

定义3　a是一状态，位置函数P_{a}，反序函数L_a定义如下：

$$P_a(i)=\begin{cases}\text{编号}i\text{的牌在}a\text{下的位置号} & 1\leq i<16\\ \text{空格在}a\text{下的位置号} & i=16\end{cases}$$

$$L_a(i)=\text{牌}j\text{小于牌}i$$

且

$$P_a(j)>P_a(i)\text{的数目},\quad 1\leq j<i\leq 16$$

定义4　S是一个4×4矩阵，其定义如下：

$$S_{ij}=\begin{cases}1 & i,j\text{奇偶性不同}\\ & \qquad\qquad 1\leq i,j\leq 4\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

函数$X(a)$定义如下：

$$X(a)=\begin{cases}1 & P_a(16)\text{对应位置的}S_{ij}\text{的值为}1\\ & \qquad\qquad a\text{ 为一任意状态}\\ 0 & P_a(16)\text{对应位置的}S_{ij}\text{的值为}0\end{cases}$$

函数$f(a)$定义如下：

$$f(a)=\sum_{i=1}^{16}L_u(i)+X(a)$$

a为一任意状态。

注意：移动牌与移动空格是实质上是等效的。

引理 1　设a为一任意给定的状态，空格的每个上、下移不改变$f(a)$的奇偶性。

证明：在状态a下，非空格牌被空格分割为以行为主序的连续的两段l_1,l_2(l_1,l_2可以为空)。当空格上移后，状态a 转为状态$a¢$，l_1最右边连续的四张牌的编号$i_1i_2i_3i_4$转换为$i_2i_3i_4i_1$加入到l_2的最左端。由于$i_1i_2i_3i_4$是长度为4的一个排列，$i_2i_3i_4i_1$是$i_1i_2i_3i_4$的一个轮换，前者通过3次相邻元素的对换得到后者，由代数知识可知，一个对换改变排列的奇偶性，另外由于$i_1i_2i_3i_4$16变为16 $i_2i_3i_4i_1$，反序数增加4，于是$\Sigma_{1\leq i\leq 16}L_a(i)$的奇偶性改变。同时$X$由0变成1，或者由1变到0，于是$f(a')$与$f(a)$有相同的奇偶性。它说明，空格的一次合法的上移得到的新状态不改变原状态的f值的奇偶性。空格的下移与上移对称，类似可证。□

引理 2　设a为一任意给定的状态，空格的每个左、右移不改变$f(a)$的奇偶性。

证明：当空格左移后，状态a转为状态a'，l_1最右端的一张牌放到l_2的最左端。此时，$\Sigma_{1\leq i\leq 15}L_a(i)=\Sigma_{1\leq i\leq 15}L_{a'}(i)$，但是随着空格的左移，“$a$空格”变成“空格$a$”，$\Sigma_{1\leq i\leq 16}L_{a'}(i)$与$\Sigma_{1\leq i\leq 16}L_a(i)$的奇偶性互异，同时$X$由0变成1，或者由1变到0，于是$f(a')$与$f(a)$有相同的奇偶性。它说明，空格的一次合法的左移得到的新状态不改变原状态的f 值的奇偶性。空格的右移与左移对称，类似可证。□

定义 5 15-谜问题的动作规则按图2所示定义如下(a,b,c,d,e空格分别代表5张牌的编号)：

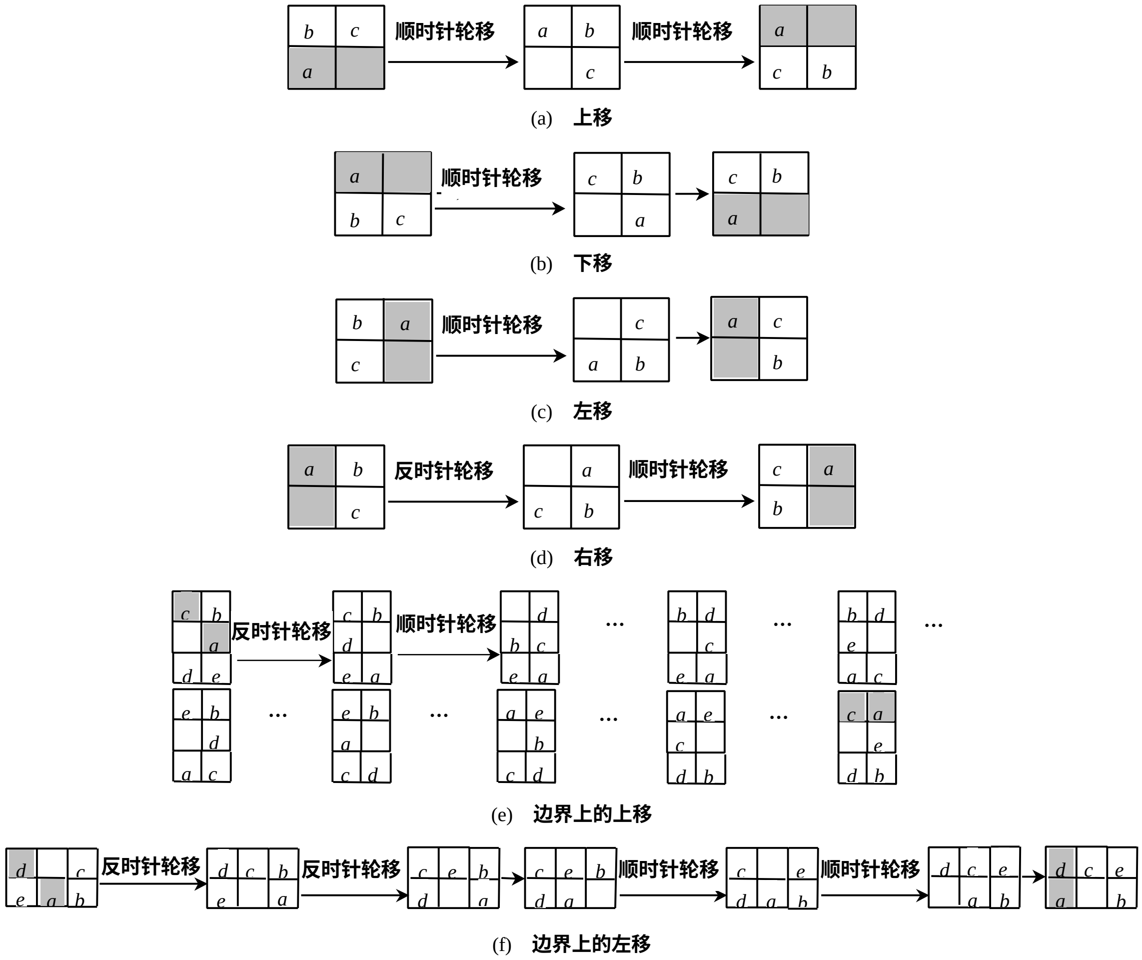

图2 15-谜问题的动作规则a~f的图示

定理 1 设a为一任意给定的初始状态，目标状态b是有序态，实例a的15-谜问题有解，即a可达b，当且仅当$f(a)$为偶数。

证明：首先证明必要性。因为目标状态b是有序态，由$X(b)$的定义，$X(b)=0$；由L_b的定义，$L_b(i)=0$，$1\leq i\leq 16$. 于是，$f(b)=0$为偶数。此时只需证明 $f(a)$为偶数：因为a可达b，总可以通过空格的合法的上、下、左、右移到达b。由引理1、2上、下、左、右移不改变 f 值的奇偶性。于是 $f(a)$必为偶数。

证明充分性。设a为一任意给定的初始状态，目标状态b是有序态。若a就是b，结论自然成立；若a不是b，逐一考虑编号为i ($i=1,\cdots,15$)的牌，$i=1$时，如若牌号为1的牌不“到位”，视具体情况，将空格牌移动到1号牌的附近，形成$a,b,c,$空格牌($a=1$)的“四方联”的格局。根据需要，执行一系列定义5的动作规则a、c以及必要的移动空格，便可将1号牌移到第一行第一列的位置上。由于移动牌与移动空格是实质上是等效的。由引理1，2可知，每一次移动不改变$f(a)$的奇偶性。同理，可通过执行一系列定义5的动作规则a、c、d以及必要的移动空格，将2,3号牌到位而不改变$f(a)$的奇偶性。此刻第一行牌的编号依次是：1，2，3，空格，如果编号为4的牌刚好位于第二行第四列，则可直接将4号牌移到第一行第四列的位置上，使得第一行的四个元素全部到位，这一系列的移动不改变$f(a)$的奇偶性；如果编号为4的牌不在第二行第四列，执行移动空格以及定义5的动作规则4，再执行规则5，可将4号牌到位而不改变$f(a)$的奇偶性。再用处理1号牌的方法可使5,9号牌到位，如果13号牌不到位，执行移动空格以及定义5的动作规则3，再执行规则6，可将13号牌到位而不改变$f(a)$的奇偶性。此刻，原问题变成3×3的同性质的问题，类似于前面的方法，再将问题归约为2×2的问题。容易分析可得，通过定义5的规则1,2,3,4,以及空格的移动，总可将由11,12,15号牌以及

空格牌构成的格局归为$\begin{array}{|c|c|}\hline 11 & 12 \\ \hline 15 & \\ \hline\end{array}$和$\begin{array}{|c|c|}\hline 11 & 15 \\ \hline 12 & \\ \hline\end{array}$两种，第一种是目标状态的一个子格局，第二种对应的状态a'，$f(a')$为奇数，它不能到达目标状态b。 □

对于一任意给定的初始状态a，用定理1解决解的存在性判定；在有解的前提下，使用下面的定理构造限界函数。

定理 2　设a、b分别是初始状态与目标状态，g是有序态，a可达b。假设$f(a)$、$f(b)$同为偶数。

证明：证明充分性：因为a是任一初始状态，g是有序态，$f(a)$为偶数，由定理1知，a可达g；同理b可达g，由于b到达g 的过程是可逆的，因此g可达b，于是a可达b。

证明必要性：反证之。若$f(a)$为奇数，$f(b)$为偶数，由定理1知，a不可达g，b可达g，由于b到达g的过程是可逆的，g可达b，于是a不可达b，与已知矛盾；同理可证若$f(a)$为偶数，$f(b)$为奇数也会得出矛盾；若$f(a)$、$f(b)$均为奇数，由定理1，a不可达g，b不可达g，g不可达b，a不可达b，此与已知矛盾。综上所述必要性得证。 □

定理 3　a是一任意给定的初始状态，由a出发可到达的状态为16!/2个。

证明：设a是一任意给定的初始状态，b是一目标状态，由定理2，若$f(a)$, $f(b)$都是偶数，a可达b，由代数知识可知，由1,2,⋯,16构成的排列中奇、偶排列各占排列总数的一半，同时由定义4，S_{ij}, $1\le i, j\le 4$中，0元素与1元素各占一半，于是由a出发可到达的状态为16!/2个。 □

定理3给出了状态空间的尺寸。

推论 1　15-谜问题中地到的结论可推广到2^n-1-谜。

证明：回顾定理1的证明，其过程是使用了定义5中动作规则的组合实现的，而定义5中的动作规则与n无关，总是将规模n归约为$n-1$, 因此，15-谜问题(2^4-1-迷)中得到的结论可推广到2^n-1-谜。 □

2　结 束 语

本文强调几点：

1) 定理1具有充分必要性，用于实例a的15-谜问题解的存在性判定；定理2是对定理1的扩展，本文指出解的存在性是可达性的特例，定理2描述了可达的充要条件，用于构造限界函数，便于用回溯法、分支－限界法等方法求解。

2) 定义5给出的动作规则，在设计算法时可以函数的形式实现，利用对函数的调用，实现模块化设计。

3) 定理1的充分性证明是构造性的，它提供了求解的一个算法。有关15-谜问题的最优化解——LC(least cost)分支–限界法求解，将在另文中讨论。

参 考 文 献

[1] Horowitz E, Sahni S. Fundamentals of computer algorithms[M]. New York: Computer Science Press, 1978. 370-417

[2] 余祥宣，崔国华，邹海明. 计算机算法基础. 第二版[M]. 武汉：华中理工大学出版社, 2000. 159-208

[3] Aho A V, Hopcroft J E, Ullman J D. The design and analysis of computer algorithm[M]. California: Reading Mass Addison-Wesley, 1974. 44-69

编　辑　徐安玉