第33卷 第5期 电子科技大学学报 Vol.33 No.5
2004年10月 Journal of UEST of China Oct. 2004

无穷时滞中立型微分积分方程的指数稳定性

牛健人，杨志春，徐道义
(四川大学数学学院 成都 610041)

【摘要】讨论了具有无限时滞的中立型微分积分方程的指数稳定问题，利用常数变异法获得了判定该类方程的零解指数稳定和全局指数稳定的充分条件，实例说明该文的结果较李亚谱诺夫方法更具广泛性和实用性。

关 键 词 无穷时滞; 微分积分方程; 中立型; 指数稳定性
中图分类号 O175.14 文献标识码 A

Exponential Asymptotic Stability of Neutral Integro-Differential Equations with Infinite Delays

Niu Jianren，Yang Zhichun，Xu Daoyi
(Mathematical College ,Sichuan University Chendu 610064)

Abstract This paper deals with the exponential asymptotic stability of neutral integro-differential equations with infinite delays, and some criteria are given for the exponential asymptotic stability by using the method of variation of paramefers. The results obtained here are illustrated by a example which has been particularly difficult to treat by means of the standard Lyapunov theory.

Key words infinite delays; integro-differential equations; neutral; exponential asymptotic stability exponential

由于时滞的引入，分析具有时滞的微分积分方程的稳定性相当的困难，一些学者研究了泛函微分方程的稳定性问题[1~4]，但讨论中立型微分积分方程的指数稳定性的工作较为少见。本文将滞后型微分积分方程的指数稳定性判据文献[1]推广到具有无限时滞的中立型微分积分方程的情形，获得了判定该类方程的零解指数稳定和全局指数稳定的实用判据，扩大了文献[1]的相应结果。

1 预备知识

R^n 表示n维欧几里空间，$R^+=[0,\infty)$，$C[X,Y]$ 是拓扑空间X到拓扑空间Y上的连续映射集合，$C=C([a,0],R^n)$。定义$\|f\|_a=\sup\limits_{a\le u\le t}|f(u)|$，$|\cdot|$是$R^n$上的范数。讨论中立型微分积分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_i(t)-\sum_{j=1}^{m}H_{ij}(t)x_j(r_3(t))\right]=A_i(t)x_i(t)+\sum_{j=1,j\ne i}^{m}A_{ij}(t)x_j(t)+f_i(t,x(r_1(t)))+\int_{\alpha}^{t}G_i(t,s,x(r_2(s)))\mathrm{d}s \tag{1}$$

式中 $x_i\in R^{n_i},\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n$，$r(t)\le r_1(t),r_2(t)$，$r_3(t)\le t$, $r(t)\to\infty(t\to\infty)$, $A_i(t)$，$A_{ij}(t)$ $H_{ij}(t)\in C[R,R^{n_i\times n_i}]$，$f_i\in C[R^+\times C,R^n]$，$G_i\in C[R^+\times R\times C,R^n]$，$i=1,2,\cdots,m$。本文假设式(1)有连续解$x(t,t_0,f)$，有关稳定性的定义与文献[5, 6]相同。为了讨论零解的指数稳定性，假设 $f(t,0)\equiv G(t,s,0)\equiv 0$。

收稿日期：2004－06－14
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10371083)
作者简介：牛健人(1962－)，女，在职博士生，副教授，主要从事动力系统稳定性方面的研究.

引理 1[1] 设 $x_i \in C[R, R^+](i=1,2,\cdots,m)$ 且

$$x_i(t) \le \sum_{j=1}^{n}\left\{[a_{ij}(t)\|x_{jt}\|_s + \int_{a_1}^{t} y_{ij}(t,u)\|x_{ju}\|_s \mathrm{d}u + \int_{a_2}^{t} x_{ij}(t,u)\int_{a_3}^{u} x_{ij}(u,v)\|x_{jv}\|_s \mathrm{d}v\mathrm{d}u] + b_{ij}\|f\|_a \mathrm{e}^{-d_j(t-t_0)}\right\} \quad (2)$$

式中 $a_i \in (-\infty,0],\ (i=1,2,3),\ s=t-r,\ r,\ b_{ij} \ge 0,\ d_j > 0,\ a_{ij}(t),\ y_{ij}(t,u),\ x_{ij}(t,u),\ z_{ij}(t,u)$ **是连续函数**，$(-\infty < u < t < \infty)$。**如果存在** $\pi_{ij} \ge 0$ **及** $s > 0$，**使得**

$$a_{ij}(t) + \int_{a_1}^{t} y_{ij}(t,u)\mathrm{e}^{s(t-u)}\mathrm{d}u + \int_{a_2}^{t} x_{ij}(t,u)\int_{a_3}^{u} z_{ij}(u,v)\mathrm{e}^{s(t-v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \le p_{ij}$$

且矩阵 $(\boldsymbol{p}_{ij})$ **的谱半径** $r(\boldsymbol{p}_{ij}) < 1$，**则：存在常数** $l > 0$，**对** $N > 0$，**总有正数** w_i **及** $d < \{\min w_i^{-1} N\}$，**使得** $w_i x_i < N\mathrm{e}^{-l(t-t_0)} \equiv z(t),\quad \forall t \ge t_0$，$\| f \|_a < d$。

2　主要结果

定理 1　假设下列条件满足：

1) $\left|\sum_{j=1, j\ne i}^{n_i} A_{ij}(t)x_j(t) + f_i(t, x(r_1(t)))\right| \le \sum_{j=1}^{m}\left[b^{(1)}{}_{ij}(t)\|x_{jt}\|_s + b^{(2)}{}_{ij}(t)\circ(\|x_{jt}\|_s)\right]$

$$|G_i(t,u,x(r_2(u)))| \le \sum_{j=1}^{m}\left[c^{(1)}{}_{ij}(t,u)\|x_{jt}\|_s + c^{(2)}{}_{ij}(t)\circ(\|x_{jt}\|_s)\right],\quad s = t-r\,;$$

2) $|F_i(t,t_0)| \le M_i \mathrm{e}^{-d_i(t-t_0)}$ $(M_i > 0, d_i > 0$ **为常数)，其中：**$F_i(t,t_0)$ **是线性系统** $\dfrac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t} = A_i(t)y_i(t)$ **的基解矩阵：**

3) $r(h_{ij} + b_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(1)}) < 1$，**这里** $h_{ij}\, b_{ij}^{(k)}, g_{ij}^{(k)}\,(k=1,2)$ **及** $s > 0$，$|H_{ij}(t)| \le h_{ij}$，
$\int_{t_0}^{t} |F_{ij}(t,u)|\, b^{(k)}{}_{ij}(u)\mathrm{e}^{s(t-u)}\mathrm{d}u \le b_{ij}^{(k)}$，$\int_{t_0}^{t}|F_{ij}(t,u)|\int_a^u c_{ij}^{(k)}(u,v)\mathrm{e}^{s(t-u)}\mathrm{d}u \le g_{ij}^{(k)}, \forall t \in R^+$；

则式(1)**的零解是指数稳定的。**

如果条件1)**满足且** $\circ(\| x_{jt} \|_s) \equiv 0,\quad \forall x \in R^n$，**则式**(1)**的零解是全局指数稳定的。**

证　由条件3)，**存在充分小的正数** $\bar{d}$，**使得** $r(h_{ij} + b_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(1)} + \bar{d}(b_{ij}^{(1)} + g_{ij}^{(1)})) < 1$

对上述 $\bar{d}$ **存在** $h > o,\ h < \bar{d}$ **使得** $\|x_{it}\|_s < \bar{d}$ **时，**$\circ(\|x_{it}\|_s) < \bar{d}\|x_{it}\|_s$。**由常数变易法可得**

$$x_i(t) - \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(t)x_j(r_3(t)) = F_i(t,t_0)[x_i(t_0) + \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(t_0)x_j(r_3(t_0))] +$$
$$\int_{t_0}^{t} F_i(t,u)\left[\sum_{j=1}^{m} \mathrm{A}_{ij}(u)x(r_1(u) + f_i(u, x(r_1(u)))\right] + \int_a^u G_i(u,v,x(r_2(v))\mathrm{d}v)\mathrm{d}u$$

利用条件1)，2)**可得**

$$|x_i(t)| \le \sum_{j=1}^{m}|H_{ij}(t)\| x_{jt}\|_s + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} |F_i(t,u)| \left\{\sum_{j=1}^{m}\left[b^{(1)}{}_{ij}(u)\|x_{ju}\| + b^{(2)}{}_{ij}(u)\circ(\|x_{ju}\|)\right] + \right.$$
$$\left.\int_a^u \sum_{j=1}^{m} [\mathrm{d}^{(1)}{}_{ij}(u)c^{(1)}{}_{ij}(u,v)(\|x_{jv}\|_s) + \mathrm{d}^{(2)}{}_{ij}(u)c^{(2)}{}_{ij}(u,v)\circ(\|x_{jv}\|_s)]\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u +$$
$$|F_i(t,t_0)|\,|f_i(t_0)| + \sum_{j=1}^{m} |H_{ij}(t)|\,|f_j(r_3(t_0))| \le$$
$$\sum_{j=1}^{m}\left\{h_{ij}\|x_{jt}\|_s + \int_{t_0}^{t} |F_i(t,u)|\left[b^{(1)}{}_{ij}(u) + \bar{d}\,b^{(2)}{}_{ij}(u)\right] + \right.$$
$$\left.\int_a^u \left[c^{(1)}{}_{ij}(u,v) + \bar{d}\,c^{(2)}{}_{ij}(u,v)\right]\|x_{jv}\|_s\,\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{-d_i(t-t_0)}\|f\|_a\left(\frac{M_i}{m} + \sum_{i=1}^{m} h_{ij}\right)$$

从而由引理1**可得式**(1)**的零解是指数稳定的。进一步地，由** $\circ(\| x_{jt} \|_s) \equiv 0 (\forall x \in R^n)$ **满足时，容易得到式**(1)**的零解是全局指数稳定的。**

例1　设 $> 0, t > 0, a, b, c, h$ **为常数，讨论标量方程**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t) - hx(t-t)] = -atx(t) + btx(t-t) + ct\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-a(t-s)}x(s)\mathrm{d}s \quad (3)$$

显然式(3)满足条件1)，2)，$F(t,t_0)\le \mathrm{e}^{-a(t-t_0)}$，对$t_0\ge 1$，及任意

$$s<\max\{a,a\} \tag{4}$$

$$\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_u^t -av\mathrm{d}v\right\}(|b-ah|)u\mathrm{e}^{s(t-u)}\mathrm{d}u \le \int_{t_0}^{t} \exp\left\{-(a-s)\int_u^t v\mathrm{d}v\right\}(|b-ah|)u\mathrm{d}u\le\frac{(|b-ah|)}{a-s}$$

$$\int_{t_0}^{t}\exp\left\{\int_u^t -aw\mathrm{d}w\right\}|c|u\int_{-\infty}^{u}\mathrm{e}^{-a(u-v)}\mathrm{e}^{s(t-v)}\mathrm{d}v\mathrm{d}u\le\frac{|c|}{(a-s)(a-s)}$$

根据式(4)，存在$s>0$，使得

$$\frac{|b-ah|}{a-s}+\frac{|c|}{(a-s)(a-s)}<1，\quad \frac{|b-ah|}{a}+\frac{|c|}{aa}<1$$

即式(3)成立。根据定理1，式(3)的零解是全局指数稳定的。

参 考 文 献

[1] Xu Daoyi. Integro-diferential equations and delay integral inequalities[J]. Iô hoku Math. J. 1992, 44: 365-378

[2] 徐道义，中立型泛函微分系统的稳定性[J]. 数学学报, 1992, 35(5): 632-641

[3] Harris C J, Miles J F. Stability of linear systems: some aspects of kinematic similarity[M]. London: Academic Press, 1980

[4] Guo Shangjiang. Huang Lihong. Stability analysis of delayed Hopfield neural network[J]. PHYSICAL Review F, 2003, 67: 061902-1-061902-7

[5] Burton T A, Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Equations[M]. New York: Academic Press, 1985

[6]Hara T, Yoneyama T, Iroh T. Asymptotic stability criteria fir nonlinear Volterra integro-differential equations[J]. Ekvac. 1990, 33: 39-57

编 辑 刘文珍

(上接第596页)

参 考 文 献

[1] U.S. Precision Lens Inc. Projection television past future[R]. 2001

[2] 成建波，林祖伦. 一种阴极射线管及其制造方法[P]. ZL951132, 1998

[3] Cheng J B,Wang Q H.Display Devices and Systems[J]. SPIE, 1996, 2892:36-38

[4] 成建波，陈文彬. 投影管用荧光粉的问题及进展[J]. 真空科学与技术学报, 2000, 20(2):92-95

[5] 肖士璋，冉启钧. 电子光学应用[M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1995. 10-65

[6] Melcher R L. Projection television[A]. Euro display Workshop, 2000

编 辑 漆 蓉

(上接第599页)

参 考 文 献

[1] 鹿士杰，袁泽虎，王 娟. 面向对象的技术在CAD二次开发中应用[J]. 湖北工学院学报，2002, 17(2): 38-39

[2] 陈 良. 面向对象技术在机械CAD中的初探[EB/OL]. http://www.e-works.net.com.cn/index.htm, 2001-02-02

[3] 姜德森. 面向对象方法[J]. 泉州师范学院学报(自然科学)，2003, 21(3): 14-19

[4] 彭 韧. 计算机辅助工业设计[M]. 北京：中国轻工业出版社，2001

[5] Parametric Technology Corporation. Pro/engineer wildfire Pro/toolkit user’s guide[Z]. USA：PTC公司, 2003

编 辑 孙晓丹