第 33 卷　第 5 期　　电子科技大学学报　　Vol.33　No.5
2004 年 10 月　　Journal of UEST of China　　Oct. 2004

非惯性系中的动量定理与动量守恒

李　铁

(重庆工学院数理学院　重庆　400050)

【摘要】在经典力学框架下，推导出了既有平动、又有转动的一般非惯性系中动量定理的表达式。讨论了一般非惯性系中动量守恒的条件。通过考察非惯性系中一个不受相互作用外力的物体系统的运动过程，举例阐述了对“封闭系统”动量守恒的认识。指出了由于惯性力起着与外力相同的作用，因此相对于非惯性系，封闭的物体系统是不存在的。

关　键　词　非惯性系；　动量定理；　动量守恒；　封闭系统

中图分类号　O313　　　文献标识码　A

Momentum Theorem and Momentum Conservation in Non-Inertial System

Li Tie

(School of Mathematics and Physics Sciences, Chongqing Institute of Technology　Chongqing　400050)

Abstract　Under the classical mechanics frame, this paper derive the expression of momentum theorem and deliberate the condition of momentum conservation in a general non-inertial frame, in translation and rotational motion. Then this paper formulize the cognition of momentum conservation on "close system" through surveying the motion in a system that hasn’t any interaction with outside force in non-inertial system. As a result, it is pointed out clearly that since inertia force takes the role similar to outside force, therefore, closed system does not exist relative to non-inertia system.

Key words　non-inertia system;　momentum theorem;　momentum;　conservation;　closed system

动量定理与动量守恒定律在物理学中占有十分重要的地位，国内外一般力学教程对惯性系中的情况都作了详尽介绍。至于对非惯性系中动量定理的讨论，大多仅局限于质心参照系。由于实际的参照系(如常见的地心参照系与日心参照系)都不是惯性系，因此对既有平动、又有转动的一般非惯性系中动量定理与动量守恒情况进行较深入的探讨研究，无疑具有比较重要的理论价值及实际意义。本文试图在经典力学框架下，推导出在一般非惯性系中动量定理的微分形式，并讨论在一般非惯性系中动量守恒的条件。

1　非惯性系中的动量定理

若在非惯性系中引入惯性力，则可以导出适用于一般非惯性系的动量定理，推导如下：

设有一非惯性参照系 $oxyz$ (以下简称 k' 系)相对另一惯性系 $OXYZ$ (以下简称 k 系)作一般运动，k' 系原点的加速度用 $\boldsymbol{a}_0$ 表示，转动角速度与角加速度分别用 ? 和ß 表示，现有 n 个质点组成的质点系相对 k' 系作任意运动，$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_n$ 表示各质点相对 k' 系原点的位矢，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ 表示各质点相对于 k' 系运动的速度，如

收稿日期：2004 – 03 – 10

作者简介：李　铁(1957 –)，男，副教授，主要从事理论物理教学方面的研究.

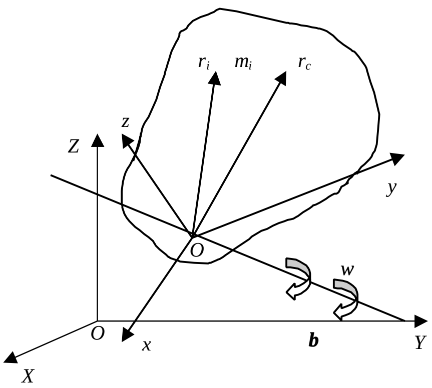

图1　推导非惯性系动量定理用图

图1所示。从图中得知，相对 k' 系，第 i 个质点的运动微分方程为

$$m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{f}_i+\boldsymbol{F}_{ei}+\boldsymbol{F}_{ci} \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{F}_i$，$\boldsymbol{f}_i$，$\boldsymbol{F}_{ei}$，$\boldsymbol{F}_{ci}$ 分别为作用于第 i 个质点上的相互作用外力，相互作用内力，牵连惯性力和科氏惯性力。将式(1)两端作适当改写并对等式两端各项求和，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ei}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ci} \tag{2}$$

式中　$\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{p}_r$ 为质点系相对于非惯性系 k' 的动量。同时对质点系来说，有 $\left(\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{f}_i\right)=0$。再代入 $\boldsymbol{F}_{ei}=-m_i\left[\boldsymbol{a}_0+?\times(?\times\boldsymbol{r}_i)+ß\times\boldsymbol{r}_i\right]$，$\boldsymbol{F}_{ci}=-2m_i(?\times\boldsymbol{v}_i)$，式(2)就成为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_r}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i-\left(\sum_{i=1}^{n}m_i\right)\boldsymbol{a}_0-\sum_{i=1}^{n}m_i?\times(?\times\boldsymbol{r}_i)-\sum_{i=1}^{n}m_i\,ß\times\boldsymbol{r}_i-\sum_{i=1}^{n}2m_i(?\times\boldsymbol{v}_i) \tag{3}$$

式中　$\sum_{i=1}^{n}m_i=M$，$\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{r}_i=M\boldsymbol{r}_c$，$\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i=M\boldsymbol{v}_c$，其中 M 为质点系的质量，$\boldsymbol{r}_c$ 为质点系质心相对 k' 系的位矢，$\boldsymbol{v}_c$ 为质点系质心相对 k' 系的速度。由此，式(3)可进一步写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_r}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i-M\boldsymbol{a}_0-M?\times(?\times\boldsymbol{r}_c)-Mß\times\boldsymbol{r}_c-2M?\times\boldsymbol{v}_c \tag{4}$$

式(4)即为在一般非惯性参照系中的动量定理。其含义为：相对于非惯性系，质点系动量的导数，等于作用在质点系上一切相互作用外力，一切牵连惯性力以及科里奥利力作用之和。由于惯性力不服从作用与反作用定律，故这些惯性力与相互作用外力一样，都能使质点系的动量发生变化。式(4)是一般情况下的动量定理，它理应包含通常的理论力学教材中的一些特殊情况，讨论如下：

1) 若 $\boldsymbol{a}_0=0$，$?=0$，$ß=0$，且两坐标系原点重合。此时质点系相对于惯性参照系运动，式(4)成为惯性系中质点系的动量定理，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_r}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i \tag{5}$$

2) 若 $?=0$，$ß=0$，但 $\boldsymbol{a}_0\neq0$，此时非惯性系为一平动加速参照系，式(4)成为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_r}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i-M\boldsymbol{a}_0 \tag{6}$$

式中　$(-M\boldsymbol{a}_0)$ 为质点系所有质点所受平动惯性力的合力。特别是，若取质点系质心作为 k' 系原点时，由惯性系中的质心运动定理，有 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i-M\boldsymbol{a}_0=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i-M\boldsymbol{a}_c=0$，这里的 $\boldsymbol{a}_c$ 为质点系质心相对惯性系的加速度。且此时 $\boldsymbol{P}_r=\boldsymbol{P}_c=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i=M\boldsymbol{v}_c$。于是式(6)成为

$$\boldsymbol{P}_c=\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{v}_i=M\boldsymbol{v}_c=\text{常矢}\equiv0 \tag{7}$$

式(7)即为质心参照系中质点系的动量定理。

2　非惯性系中的动量守恒

由式(4)，若令 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ei}=-M\left[\boldsymbol{a}_0+?\times(?\times\boldsymbol{r}_c)+ß\times\boldsymbol{r}_c\right]=-\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\boldsymbol{a}_0+?\times(?\times\boldsymbol{r}_i)+ß\times\boldsymbol{r}_c\right]$，

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ci}=-2M?\times\boldsymbol{v}_c=-\sum_{i=1}^{n}2m_i?\times\boldsymbol{v}_i$$

则式(4)可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}_r}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ei}+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ci} \tag{8}$$

由式(8)可讨论在一般非惯性系中动量守恒的条件。

首先，要求$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = 0$，即作用在质点系上相互作用外力之和等于零。这一条件在某些情况下是能够满足的，如通常在惯性系中遇到的封闭系统，满足$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = 0$。相对于非惯性系，这样的系统同样满足$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = 0$。

其次，要求$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ci} = -\sum_{i=1}^{n}\left(2m_i\boldsymbol{?}\times\boldsymbol{v}_i\right) = 0$，即作用在质点系上的科氏惯性力之和等于零。该条件有如下几种情形：1) 非惯性系为平动加速参照系，此时$\boldsymbol{?} = 0$；2) 非惯性系为转动参照系，即$\boldsymbol{?} \neq 0$，但各质点在非惯性系中处于相对平衡状态，即$\boldsymbol{v}_i = 0$；3) 非惯性系的$\boldsymbol{?} \neq 0$，各质点的$\boldsymbol{v}_i \neq 0$，但$\boldsymbol{v}_i // \boldsymbol{?}$；4) 在非惯性系中，由于各质点的运动，恰能使$\sum_{i=1}^{n}\left(-2m_i\boldsymbol{?}\times\boldsymbol{v}_i\right) = 0$成立。在这些情形下，均可以使$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ci} = 0$得以满足。

最后，由式(8)，若相对于非惯性系的动量欲守恒，除需要满足上述条件外，还必须满足$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ei} = 0$，即质点系所受到的牵连惯性力之和等于零，下面进一步作些分析。众所周知，惯性力是非惯性系加速度的反映，其主要特征之一就是不遵从作用与反作用定律，只要是在非惯性系中考察物体受力，就总会存在不会被抵消的惯性力(如作用在各物体上的牵连平动惯性力)。这些惯性力起着外力的作用，其效果是改变质点系相对于非惯性系的动量。因此，对既有平动、又有转动的非惯性系，无法满足$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ei} = 0$的条件。

综上所述，对一般的非惯性系，由于至少无法满足$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ei} = 0$，因此，通常很难写出矢量形式的动量守恒关系式。除非在极特殊的情况下，作用在系统上的相互作用外力与惯性力之和$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{ei} + \boldsymbol{F}_{ci} = 0$，才有$\boldsymbol{P}_r = \sum_{i=1}^{n} m_i\boldsymbol{v}_i =$常矢量，即系统相对于非惯性系的动量守恒。例如在质心平动加速参照系中，有$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{ci} = 0$，而作用在各物体上彼此平行的牵连惯性力的矢量和恰好通过系统的质心，与作用于系统质心上的相互作用外力之和刚好抵消[1]，导致了$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{F}_{ei} = 0$。

应该指出，上述结论并不排除在一定条件下，质点系的动量沿某方向分量守恒关系的成立，譬如，质点系相对非惯性系的受力若满足

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_{eix} = \sum_{i=1}^{n} F_{cix} = 0$$

则有

$$P_{rx} = P_{rx0} = \text{常量} \tag{9}$$

即质点系沿X方向的相对动量保持不变。

3　对封闭系统动量守恒的再认识

相对惯性系，通常所说的封闭系统是指不受相互作用外力的物体系统，由于满足$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = 0$，故封闭系统在惯性系中的动量是守恒的。但是，如果在非惯性系中考察一个不受相互作用外力的物体系统的运动过程，尽管此时仍有$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i = 0$， 然而由于存在不满足作用与反作用定律的惯性力，这些惯性力不会被抵消，它们起着与外力相同的作用，使物体系统的动量发生变化。因此，从这个意义上来说，相对于非惯性系，封闭的物体系统是不存在的，自然也就不能把惯性系中的动量守恒定律直接推广到非惯性系之中[2]。下面以常见的物体落向地面过程中，物体地球系统的动量变化为例，来加深对这一观念的认识。

例　讨论物体落向地面的过程中，物体地球系统动量的变化。

如图2所示，由图中看出，对地球外的某一惯性系，因物体与地球构成了一个封闭系统，故系统动量守恒。若用m、M分别表示物体与地球的质

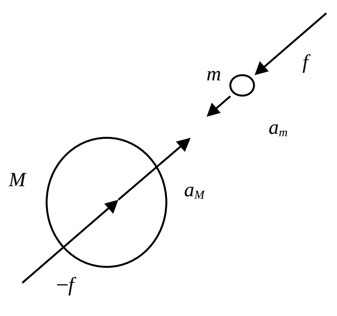

图2　物体地球系统

量；v_m，V_M，a_m，a_M 分别表示物体与地球相对惯性系的速度和加速度，则存在如下关系

$$m\boldsymbol{v}_m = M\boldsymbol{V}_M\,,\quad m\boldsymbol{a}_m = M\boldsymbol{a}_M\,,$$

即
$$\frac{\boldsymbol{v}_m}{\boldsymbol{V}_M} = \frac{M}{m}\,,\quad \frac{\boldsymbol{a}_m}{\boldsymbol{a}_M} = \frac{M}{m}\,,$$

对该问题，也可取与地球相连的参照系来讨论。由于地球相对于惯性系有加速度$\boldsymbol{a}_M$，故地球参照系是一个平动加速的非惯性系(简称地球系)。在地球上观察，物体的动量为 $m(\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{V}_M) = (M+m)\boldsymbol{V}_M$ (因$\frac{\boldsymbol{v}_m}{\boldsymbol{V}_M} = \frac{M}{m}$)，这也是物体地球系统的总动量。另一方面，对地球系，作用于物体地球系统的相互作用外力之和等于零，但此时须考虑系统所受的惯性力。作用在物体上的惯性力为$m\boldsymbol{a}_M$，作用在地球上的惯性力为$M\boldsymbol{a}_M$，这两力之和等于$(M+m)\,\boldsymbol{a}_M$。根据式(7)，在地球参照系中可列出方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(M+m)\boldsymbol{V}_M] = (M+m)\boldsymbol{a}_M$$

上式表明：物体地球系统总动量的导数等于惯性力作用之和。在这里可看到，系统的动量变化是由于惯性力的作用获得的，惯性力起着与外力相同的作用效果。

参 考 文 献

[1] 郭士堃. 理论力学(上册)[M]. 北京：人民教育出版社，1982

[2] 王均能. 非惯性系力学概论[M]. 成都：电子科技大学出版社，1993

编 辑 刘文珍

(上接第622页)

3 结 束 语

本文之所以要讨论布尔函数的连续化问题，是因为在许多密码算法的设计中，随着SP网络迭代层数的增加，一般布尔函数的连续化函数，由于不是信息论意义之下最优的连续化函数，使得目标函数的信息衰减太大，又加之SP网络迭代的密码学意义之一就是使明码信息迅速扩散，故一般连续化函数构造的目标函数，其优化算法的求解能力相对较差，所以布尔函数的最优连续化的问题，已成为有待进一步讨论的问题之一。

本文部分研究结果得到了中国科学院数学与系统科学研究院章祥荪研究员、袁亚湘研究员、刘木兰研究员及刘德刚副研究员的指导与帮助，在此表示感谢。

参 考 文 献

[1] Andelmen D. Maximum likelihood estimation applied to cryptanalysisp[D]. A Dissertation Submitted to the Department of Electrical Engineering and the Committee on Graduate Studies of Stanford University in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy . Stan ford, 1979.

[2] Daemen J, Vincent R J. The design of rijndael[M], New York: Springer-Verlag, 2002

[3] 吕述望, 范修斌, 周玉洁. 序列密码的设计与分析[M]. 北京：中软电子出版社，2003

[4] Thomas M. Cover, Joy A. Thomas, elements of information theory [M]. Chichester VSA: John Wiley & Sons, Inc., 1991

[5] Kullback S. Information theory and statistics [M]. New York: Wiley, 1959

编 辑 刘文珍