第34卷　第1期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.34　No.1
2005年2月　　Journal　of　UEST　of　China　　Feb. 2005

可对称化矩阵特征值的任意扰动

陈建新
(广东工业大学应用数学学院　广州　510006)

【摘要】针对可对称化矩阵，研究了可对称化矩阵特征值的任意扰动和实任意扰动。从Schur分解入手，利用矩阵可对角化的性质，通过矩阵等式的恒等变形，得到了可对角化矩阵关于F-范数和Q-范数的任意扰动界。

关　键　词　可对称化矩阵；扰动界；F-范数；Q-范数
中图分类号　O241.6；O151.2　　文献标识码　A

Arbitrary Perturbation Bounds on Diagonalizable Matrix

CHEN Jian-xin
(Department of Mathematics, Guang dong University of Technology　Guangzhou　510006)

Abstract　In this paper, to symmetrical matrix (diagonalizable matrix), we have studied arbitrary perturbation and real arbitrary perturbation of it (with real eigenvalue arbitrary perturbation). It is started with to resolve from everybody known very well Schur decomposition, utilizing matrix that can be diagonalizable and identically equal through matrix equality out of shape, receiving perturbation bounds of diagonalizable matrix about F-norm and Q-norm.

Key words　symmetrical matrices;　perturbation bound;　F-norm;　Q-norm

设$\boldsymbol{A}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$是复数域上的$n\times n$阶矩阵。称$\boldsymbol{A}$是可对角化矩阵，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{Q}$，使得$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$，$=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中，$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是$\boldsymbol{A}$的特征值。$\boldsymbol{A}^*$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的共轭转置。$\boldsymbol{A}$的条件数被定义为$\kappa(\boldsymbol{X})=\|\boldsymbol{X}\|_2\|\boldsymbol{X}^{-1}\|_2$。用$\|\boldsymbol{A}\|_F$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的Frobenius范数，$\|\boldsymbol{A}\|_Q$表示矩阵$\boldsymbol{A}$的$Q$-范数[1]。

1　主要结果

引理1[1]　设$\boldsymbol{A}$是Hermite矩阵。$\tilde{\boldsymbol{A}}$是可对称化矩阵，即存在可逆矩阵$\tilde{\boldsymbol{X}}$，使得$\tilde{\boldsymbol{X}}^{-1}\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{X}}$是实对角矩阵，则有$\left\|Eig^{\downarrow}(\boldsymbol{A})-Eig^{\downarrow}(\tilde{\boldsymbol{A}})\right\|_Q\leqslant\kappa(\tilde{\boldsymbol{X}})^{\frac{1}{4}}\left\|\boldsymbol{A}-\tilde{\boldsymbol{A}}\right\|_Q$，$Eig^{\downarrow}(\boldsymbol{A})=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$Eig^{\downarrow}(\tilde{\boldsymbol{A}})=\mathrm{diag}(\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\cdots,\tilde{\lambda}_n)$，且$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，$\tilde{\lambda}_1\geqslant\tilde{\lambda}_2\geqslant\cdots\geqslant\tilde{\lambda}_n$。

引理2[1]　设$\boldsymbol{Y}$和$\tilde{\boldsymbol{Y}}$是复数域上的$n\times n$阶矩阵，则对所有的Q-范数，当$1\leqslant k\leqslant n$时，$\|\boldsymbol{Y}\|_Q\leqslant\|\tilde{\boldsymbol{Y}}\|_Q\Leftrightarrow\|\boldsymbol{Y}\|_{K,2}\leqslant\|\tilde{\boldsymbol{Y}}\|_{K,2}$其中，$\|\boldsymbol{Y}\|_{k,2}=(\sum\limits_{i=1}^{k}\sigma_i^2)^{\frac{1}{2}}$，$\sigma_i$是$\boldsymbol{Y}$的奇异值。

下面记Re (•)表示•的实部，tr($\boldsymbol{A}$)表示矩阵$\boldsymbol{A}$的迹。以下给出本文的主要结果。

定理1　设$\boldsymbol{A}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+E$是复数域上的$n\times n$阶矩阵，$\boldsymbol{A}$是可对称化矩阵，即存在可矩阵$\boldsymbol{X}$，使得$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{AX}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$，其中$\lambda_i$是实数。　$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}+E$是任意矩阵，$\lambda_k$与$\mu_k+\mathrm{i}\nu_k$分别是$\boldsymbol{A}$，$\tilde{\boldsymbol{A}}$的特征值。

收稿日期：2003－04－02
基金项目：广东省高校教师自然科学基金资助项目
作者简介：陈建新(1977－)，女，硕士生，助教，主要从事矩阵、扰动分析方面的研究.

则：

$$\sum_{K=1}^{n}\left|(\mu_k+\mathrm{i}\nu_k)-\lambda_k\right|^2\leqslant\kappa(X)^{\frac{1}{2}}\left(\|E\|_F^2+2\|E_J\|_F\sqrt{\|E_R\|_F^2-\frac{(\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}E_R)^2}{n}}\right)$$

式中 $E_R=\dfrac{E+E^*}{2}$，$E_J=\dfrac{E-E^*}{2i}$，$E=E_R+\mathrm{i}E_J,\kappa(X)=\|X\|_2\|X^{-1}\|_2$。

证明 由$\tilde{A}$的Schur分解，假设$\tilde{A}=M+\mathrm{i}N+U$，其中$M=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$N=\mathrm{diag}(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$，$U$是严格上三角矩阵。从而有：

$$A+E_R=M+\frac{U+U^*}{2},\qquad E_J=N+\frac{U-U^*}{2i} \tag{1}$$

由式(1)可得：

$$\frac{1}{2}\|U\|_F^2=\|E_J\|_F^2-\|N\|_F^2 \tag{2}$$

式中 M为Hermite矩阵，A为可实对角化矩阵，则由引理1和式(1)可得：

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\mu_k-\lambda_k\right|^2\leqslant\kappa(X)^{\frac{1}{2}}\|M-A\|_F^2\leqslant\kappa(X)^{\frac{1}{2}}\left\{\|E_R\|_F^2+\left\|\frac{U+U^*}{2}\right\|_F^2+\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\left(E_R^*\frac{U+U^*}{2}+\frac{U+U^*}{2}E_R^2\right)\right\}=$$

$$\kappa(X)^{\frac{1}{2}}\left\{\|E_R\|_F^2+\frac{1}{2}\|U\|_F^2+2\,\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\left(E_R^2\frac{U+U^*}{2}\right)\right\}$$

而对任意的$\tau\in R$，R表示实数域：

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\left(E_R^*\frac{U+U^*}{2}\right)\leqslant\|E_R-\tau I\|_F\left\|\frac{U+U^*}{2}\right\|_F\leqslant\sqrt{\|E_R\|_F^2-\frac{(\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}E_R)^2}{n}} \tag{3}$$

由式(2)和(3)得：

$$\sum_{k=1}^{n}\left|\mu_k-\lambda_k\right|^2\leqslant\kappa(X)^{\frac{1}{2}}\left\{\|E\|_F^2-\|N\|_F^2+2\sqrt{\left(\|E_R\|_F^2-\frac{(\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}E_R)^2}{n}\right)\left(\|E_J\|_F^2-\|N\|_F^2\right)}\right\}$$

设$\mu_k+\mathrm{i}\nu_k$是$\tilde{A}$的特征值。又知$\kappa(X)^{\frac{1}{2}}\geqslant1$，且 $\sum_{i=1}^{n}\nu_k^2=\|N\|_F^2$。则：

$$\sum_{k=1}^{n}\left|(\mu_k+\mathrm{i}\nu_k)-\lambda_k\right|^2\leqslant\kappa(X)^{\frac{1}{2}}\left\{\|E\|_F^2+2\|E_J\|_F\sqrt{\|E_R\|_F^2-\frac{(\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}E_R)^2}{n}}\right\}$$

对具有实特征值的任意矩阵$\tilde{A}$，存在一个可逆矩阵$\tilde{X}$化$\tilde{A}$为其约当标准形$\tilde{X}^{-1}\tilde{A}\tilde{X}=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_p)$，其中，$J_i$为特征值$\lambda_i$的$k_i$阶Jordan块。对$\varepsilon\neq0$和$i$=1,2,⋯, p，令$T_i\in C^{k_i\times k_i}$，且$T_i=\mathrm{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{k_i-1})$，则：

$$T_i^{-1}J_iT_i=\Omega_i+\Lambda_i$$

式中 $\Lambda_i=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\Omega_i=(\omega_{ij})$，$\omega_{ij}=\begin{cases}\varepsilon & j=i+1\\ 0 & j\neq i+1\end{cases}$；令$T=\mathrm{diag}(T_1,T_2,\cdots,T_P)$。则：

$$T^{-1}\tilde{X}^{-1}\tilde{A}\tilde{X}T=\Omega+\wedge \tag{4}$$

式中 $\Omega=\mathrm{diag}(\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_p)$，$\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_1I,\lambda_2I,\cdots,\lambda_PI)$。

定理2 设A是可对称化矩阵，即存在可逆矩阵X，使得$X^{-1}AX=\wedge$，且$\wedge=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_i(i=1, 2, \cdots,n)$是$A$的实特征值。$\tilde{A}=A+E$是具有实特征值的任意矩阵，从而存在可逆矩阵$\tilde{X}$，$T$满足式(4)，则$\left\|Eig^{\downarrow}(A)-Eig^{\downarrow}(\tilde{A})\right\|_Q\leqslant\kappa(X)^{\frac{4}{5}}\kappa(\tilde{X})^{\frac{1}{4}}\kappa(T)^{\frac{1}{4}}\|E\|_Q\max\left\{f\left(\frac{2}{m}\right),f(2)\right\}$，其中，$f(y)=1+\sqrt{n-p}\kappa(\tilde{X})^n\|I_1\|_Q$，且$I_1=e_1e_1^T$，$e_1$表示单位矩阵的第一列。

证明 由式(4)可知：$X^{-1}(A-\tilde{A})X=\wedge-X^{-1}\tilde{X}T(\tilde{\wedge}+\Omega)T^{-1}\tilde{X}^{-1}X$。

由此可得：

$$\left\|X^{-1}EX+X^{-1}\tilde{X}T\Omega T^{-1}\tilde{X}^{-1}X\right\|_{k,2}=\left\|\wedge-X^{-1}\tilde{X}T\tilde{\wedge}T^{-1}\tilde{X}^{-1}X\right\|_{k,2}$$

令 $X^{-1}\tilde{X}T$ 的奇异值分解为：$X^{-1}\tilde{X}T=U\Gamma V^*$，其中，$U,V$ 是酉矩阵，$\Gamma=\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，$\gamma_1\geqslant\cdots\gamma_n\geqslant 0$，则：

$$\left\|X^{-1}EX+X^{-1}\tilde{X}T\Omega T^{-1}\tilde{X}^{-1}X\right\|_{k,2}=\left\|U^*\wedge U-\Gamma V^*\tilde{\wedge}V\Gamma^{-1}\right\|_{k,2}=\left\|B-\Gamma\tilde{B}\Gamma^{-1}\right\|_{k,2} \tag{5}$$

式中　$B=U^*\wedge U$，$\tilde{B}=V^*\tilde{\wedge}V$ 均为Hermite矩阵，由引理1的证明可知：

$$\left\|B-\Gamma\tilde{B}\Gamma^{-1}\right\|_{k,2}\geqslant\kappa(X)^{-\frac{1}{4}}\left\|Eig^{\downarrow}(B)-Eig^{\downarrow}(\tilde{B})\right\|_{k,2}=\kappa(X)^{-\frac{1}{4}}\left\|Eig^{\downarrow}(A)-Eig^{\downarrow}(\tilde{A})\right\|_{k,2}$$

由式(5)可得：

$$\kappa(\Gamma)^{-\frac{1}{4}}\left\|Eig^{\downarrow}(A)-Eig^{\downarrow}(\tilde{A})\right\|_{k,2}\leqslant\left\|X^{-1}EX+X^{-1}\tilde{X}T\Omega T^{-1}\tilde{X}^{-1}X\right\|_{k,2}$$

式中　当 $\left\|\tilde{X}^{-1}E\tilde{X}\right\|_Q\leqslant 1$ 时，设 $\varepsilon=\sqrt[m]{\left\|\tilde{X}^{-1}E\tilde{X}\right\|_Q}$，$m$是若当块的最大阶数，则 $\left\|T\right\|_2=1$，$\left\|T^{-1}\right\|_2=\varepsilon^{1-m}$　。从而式(5)可变为 $\kappa(\Gamma)^{-\frac{1}{4}}\left\|Eig^{\downarrow}(A)-Eig^{\downarrow}(\tilde{A})\right\|_Q\leqslant\kappa(X)\left\|E\right\|_Q+\kappa(X)\,\kappa(\tilde{X})\,\sqrt{n-p}\,\left\|\tilde{X}^{-1}E\tilde{X}\right\|_Q^{\frac{2-m}{m}}\left\|I_1\right\|_Q$。所以

$$\left\|Eig^{\downarrow}(A)-Eig^{\downarrow}(\tilde{A})\right\|_Q\leqslant\kappa(X)^{\frac{5}{4}}\kappa(\tilde{X})^{\frac{1}{4}}\kappa(T)^{\frac{1}{4}}\,(1+\sqrt{n-p}\,\kappa(\tilde{X})^{\frac{2}{m}}\left\|I_1\right\|_Q)\,\left\|E\right\|_Q$$

式中　$I_1=e_1e_1^T$，e_1 表示单位矩阵的第一列。

当 $\left\|\tilde{X}^{-1}E\tilde{X}\right\|_Q\geqslant 1$ 时，令 $\varepsilon=1$，$T=I$。则 $\left\|T\right\|_2=\left\|T^{-1}\right\|_2=1$，对式(5)可类似估计为：

1) 在定理1中当A为Hermite矩阵时，$\kappa(X)=1$，定理1变为一般的Hermite矩阵扰动[2]

$$\left\|E\right\|_F^2+2\left\|E_J\right\|_F\sqrt{\left\|E_R\right\|_F^2-\frac{(\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}E_R)^2}{n}}\leqslant 2\left\|E\right\|_F^2$$

2) 在定理2中当 $\tilde{A}$ 也为可对称化矩阵，此时定理2中的 $n=p$，$T=I$，即 $f(y)=1$，$\kappa(T)=1$ 此时定理2可改为文献[1]中的定理。

参 考 文 献

[1] Bhation R, Kittanen F, Li. R C, et al. Eigenvalues of symmetrizable matrices[J]. BIT, 1998, (38): 1-11

[2] Steward G W, Sun, J G. Matrix Perturbation Theory[M]. Boston: Academic Press, 1990

编　辑　刘文珍