第 34 卷 第 1 期 电子科技大学学报 Vol.34 No.1
2005 年 2 月 Journal of UEST of China Feb. 2005

变系数时滞神经网络的周期解与稳定性

朱文莉[1]，张 杰[2]

(1.西南财经大学经济数学系 成都 610000；2.四川轻化工学院 四川 自贡 643033)

【摘要】针对具有实际应用价值的时滞周期时变系数的Hopfield神经网络系统，利用了Lyapunov函数法并结合不等式分析技巧，证明了系统的解是有界的，得到了系统周期解的存在准则及平凡解指数稳定的充分条件。

关 键 词 时滞； 神经网络； 周期解； 稳定性

中图分类号 O231 文献标识码 A

Stability Analysis of Periodic Solution of Variable Coefficient and Time-Delay Hopfield Neural Networks

ZHU Wen-li[1], ZHANG Jie[2]

(1.Dept.of Economics Mathematics,SWUFE Chengdu 610000; 2.Sichuan Institute of Light Ind. & Chem.Tech. Sichuan Zigong 643033)

Abstract This paper studies periodic variable Coefficient and time-delay neural networks.According to the method of function of Lyapunov and the method of inequality analysis,the bounded solution,the existence criterion of periodic solution and the sufficient conditions of exponential stability of this system are determined.

Key words time-delay; neural networks; periodic solution; stability

对于神经网络，虽然在参数矩阵为对称矩阵且无时滞时是稳定的[1]，但适当选择时滞，可使神经网络不稳定；文献[1]已给出参数矩阵是对称矩阵时神经网络稳定的充分条件。而文献[2]取消了参数矩阵对称的限制，也给出了神经网络无条件稳定的充分条件。但文献[2]考虑的是细胞神经网络的连接权均为常数时的稳定性；文献[3]考虑神经网络的连接权是t的函数时的稳定性，本文在此基础上试图建立具有周期时变系数时滞的连接权神经网络的周期解的存在性和平凡解的稳定性的判别准则。其结果推广了文献[4，5]的相应结果。

1 系统的描述与准备

考虑如下具有时滞的神经网络：

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-d_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{n}[b_{ij}(t)\sigma_j(x_j(t))+c_{ij}(t)\sigma_j(x_j(t-\tau_j(t)))]+b_i(t)\qquad t\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其矩阵形式为：

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-\boldsymbol{D}x(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{\sigma}(x(t))+\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\sigma}(x(t-\tau))+\boldsymbol{b}(t) \tag{2}$$

式中 n 为神经元的个数，$x_i(t)$ 为第 i 个神经元在 t 时刻的状态变量，$\sigma_j(x_j)$ 为第 j 个神经元在 t 时刻的输出，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$d_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$b_{ij}(t)$、$c_{ij}(t)$ 和 $b_i(t)$ 均为连续且以 ω $(\omega>0)$ 为周期的周期

收稿日期：2003-04-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目(90208003)
作者简介：朱文莉(1967-)，女，硕士，副教授，主要从事神经网络方面的研究.

函数，因而有 $|b_{ij}(t)| \leqslant b_{ij}$、$|c_{ij}(t)| \leqslant c_{ij}$、$|b_i(t)| \leqslant b_i$，$(t \geqslant 0, i, j = 1,2,\cdots,n)$，其中，$b_{ij}$、$c_{ij}$、$b_i$ $(i, j = 1,2,\cdots,n)$ 均为非负常数；τ_j：$R^+ \to R^+$ 是连续函数，并且有 $0 \leqslant \tau_j(t) \leqslant \tau$ $(j = 1,2,\cdots,n)$，其中 τ 为常数。σ_i 为激活函数，通常取为S型函数。对任意 $t_0 \geqslant 0$，假设系统(1)满足的初始条件为：$x_i(t) = \varphi_i(t)$，$(t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$，$i = 1,2,\cdots,n)$，其中，$\varphi_i(t)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ 在 $[t_0 - \tau, t_0]$ 上连续，并且满足 $\|\varphi\|_{t_0} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}|\varphi_i(t_0+\theta)|\right\}$ 考虑如下泛函微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = \sigma(t, x_t) \tag{3}$$

式中 $\sigma: R \times C \to R^n$ 是连续的映射，$C = C([-\tau, 0], R^n)$。对 $\forall (t_0, \varphi) \in R \times C$，使用 $x(t, t_0, \varphi)$ 表示式(3)过 (t_0, φ) 的解。

定义 1　如果对 $\forall B_1 > 0$，$\exists B_2 > 0$，对 $\forall t_0 \geqslant 0$，使得对所有的 φ 满足 $\|\varphi\| < B_1$，当 $\forall t \geqslant t_0$ 时，有 $\|x(t, t_0, \varphi)\| < B_2$，则称式(3)的解是一致有界的。

定义 2　如果 $\exists B > 0$，对 $\forall B_3 > 0$，$\exists T > 0$，使得对所有的 φ 满足 $\|\varphi\| < B_3$，当 $\forall t \geqslant t_0 + T$ 时，有 $\|x(t, t_0, \varphi)\| < B$，则称系统(3)的解是一致最终有界的(UUB)。

引理[6]　假设 σ 在 $R \times C$ 上是连续的，并且 $\sigma(t + \omega, \varphi) = \sigma(t, \varphi)$，其中 $\omega > 0$ 是常数。如果式(3)的解是一致有界的和一致最终有界的，则式(3)存在以 ω 为周期的周期解。

2　系统(1)的解的有界性

定理 1　系统(1)的解是一致有界的。

证　本文对系统(1)的每一个子系统取 v 函数为 $|x_i(t)|$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，对 $|x_i(t)|$ 求Dini导数，有：

$$D^+|x_i(t)| \leqslant -d_i|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n} c_j[|b_{ij}(t)||x_j(t)| + |c_{ij}(t)||x_j(t - \tau_j(t))|] + |b_i(t)| \leqslant$$
$$-d_i|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n} c_j[b_{ij}|x_j(t)| + c_{ij}|x_j(t - \tau_j(t))|] + b_i \quad i = 1,2,\cdots,n, t \geqslant 0$$

令 $E = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 0}\{b_i\}$，于是上式变为：

$$D^+|x_i(t)| \leqslant -d_i|x_i(t)| + \sum_{j=1}^{n} c_j[b_{ij}|x_j(t)| + c_{ij}|x_j(t - \tau_j(t))|] + E \quad i = 1,2,\cdots,n, t \geqslant 0 \tag{4}$$

证明　对 $\forall B_1 > 0$，$\exists B_2 = \max\{B_1, \dfrac{E+1}{h}\} > 0$，其中，$h = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{d_i - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(b_{ij} + c_{ij})\right\}$，$\forall t_0 \geqslant 0$，当 $\|\varphi\|_{t_0} < B_1$ 时，有：

$$|x_i(t)| < B_2 \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{5}$$

对 $\forall t \geqslant t_0$ 成立。否则，因为对 $\forall t \in [t_0 - \tau, t_0]$，均有 $|x_i(t)| \leqslant \|\varphi\|_{t_0} < B_1 \leqslant B$ 成立，所以存在 $t_1 > t_0$ 及某个 i，使得 $|x_i(t_1)| = B_2$，$|x_j(t)| = \begin{cases} < B_2 & t_0 - \tau \leqslant t < t_1 \quad j = i \\ \leqslant B_2 & t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_1 \quad j \neq i \end{cases}$，从而有 $D^+|x_i(t_1)| \geqslant 0$；另一方面，由式(4)及定理的条件有 $D^+|x_i(t_1)| \leqslant -d_i B_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j(b_{ij} + c_{ij})B + E \leqslant -hB_2 + E < 0$ 矛盾。故式(5)成立，从而可知系统(1)的解是一致有界的。

3　系统(1)的周期解的存在准则

定理 2　如果系统(1)满足：

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(b_{ij} + c_{ij}) < d_i \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

则系统(1)存在以 ω 为周期的周期解。

证　由定理1得系统(1)的解是一致有界的。下面证明系统(1)的解是一致最终有界的。

取$B=\dfrac{E+2}{h}$，对$\forall B_3>0$，证存在T与t_0无关，使得对$\forall t\geqslant t_0+T$时，有：

$$|x_i(t)|<B \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

由系统(1)的解是一致有界的证明可知，对$\forall t\geqslant t_0$，有：

$$|x_i(t)|<\max\left\{B_3,\frac{E+1}{h}\right\}\leqslant B^*=\max\{B_3,B\} \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

选择$\eta=1\bigg/\left[1+\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 0}\sum\limits_{j=1}^{n}c_j(b_{ij}+c_{ij})\right]$，设$M$是满足$B+M\eta\geqslant B^*$的最小正整数，取$t_k=t_0+kT^*$ $(k=0,1,\cdots,M)$，其中，$T^*=\tau+2B^*$。

证明：

$$|x_i(t)|<B+(M-k)\eta \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{8}$$

对$\forall t\geqslant t_k$ $(k=0,1,\cdots,M)$成立。

利用归纳法，当$k=0$时，由式(7)可知，式(8)成立。

假设$k\,(0\leqslant k<M)$时，有：

$$|x_i(t)|<B+(M-k)\eta \qquad i=1,2,\cdots,n$$

对$\forall t\geqslant t_k$成立。下证$k+1$时，有：

$$|x_i(t)|<B+(M-k-1)\eta \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{9}$$

对$\forall\ t\geqslant t_{k+1}$成立。其证明类似于文献[3]定理3中式(13)的证明。特别对$\forall\ t\geqslant t_{k+1}$时，式(9)成立，由归纳法可知式(8)成立。

在式(8)中，取$k=M$，当$\|\varphi\|_{t_0}<B_3$时，有$|x_i(t)|<B\,(i=1,2,\cdots,n)$对$\forall\ t\geqslant t_M=t_0+T$成立，其中$T=MT^*$与$t_0$无关，故系统(1)的解是一致最终有界的，由引理可知定理2成立。 证毕

4 系统(1)的平衡点指数稳定的充分条件

一般说来，系统(1)没有平衡点[3]，如果系统(1)存在平衡点，且为$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$，并令$y_i=x_i-x_i^*$，则系统(1)变为：

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t}=-d_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}[b_{ij}(t)f_j(y_j(t))+c_{ij}(t)f_j(y_j(t-\tau_j(t)))] \tag{10}$$

式中 $f_j(y_j)=\sigma_j(x_j)-\sigma_j(x_j^*)$ 且$|f_j(y_j)|\leqslant c_j|y_j|$，$t\geqslant 0, i=1, 2, \cdots, n$。

定理 3 如果系统(1)满足：

1) 存在平衡点$x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T$；

2) $\sum\limits_{j=1}^{n}c_j(b_{ij}+c_{ij})<d_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$。

则系统(1)的平衡点x^*是指数稳定的。

注：当$b_{ij}(t)$、$c_{ij}(t)$和$b_i(t)$均为常数时，得到文献[4，5]的相应结果，因此，本文推广了文献[4，5]的相应结论。

参 考 文 献

[1] Civalleri P P, Gilli M, Pandolfi L. On stability of cellular neural networks with delay[J]. IEEE Tran, Circuits Systems, 1993, 40(3): 157-165

[2] 朱文莉. 一类具有时滞的神经网络的稳定性分析[J]. 电子科技大学学报, 2000, 10(5): 556-559

[3] 朱文莉. 变系数时滞神经网络的解的范围及稳定性分析[J]. 湘潭大学学报, 2001, 23: 198-202

[4] 卢宏涛, 何振亚. 带时延的细胞神经网络的无条件稳定性[J]. 电子学报, 1997, 25(1): 1-4

[5] 钟守铭. 具有时滞的细胞神经网络的稳定性[J]. 电子学报, 1997, 25(2): 125-127

编 辑 刘文珍