

# 广义希尔伯特变换及其数字实现

魏永豪, 袁晓, 滕旭东, 赵元英

(四川大学电子信息学院 成都 610064)

**【摘要】** 基于广义Hilbert变换将传统的Hilbert变换由整数阶向分数阶的推广, 其应用领域也得到了扩展。首先, 在频域定义广义Hilbert变换, 利用广义Hilbert变换来构造新的广义解析信号。然后从数字信号处理角度来考察理想的广义数字Hilbert变换器的基本性质及其数字实现。文中利用窗函数法和频率采样法设计了FIR广义数字Hilbert变换器, 并分析了设计误差。

**关键词** 分数Hilbert变换; 广义解析信号; FIR滤波器; 设计误差

**中图分类号** TN711.8; TN713.7 **文献标识码** A

## Generalized Hilbert Transform and Digital Realization

WEI Yong-hao, YUAN Xiao, TENG Xu-dong, ZHAO Yuan-ying

(School of Electronic and Information, Sichuan Univ Chengdu 610064)

**Abstract** Fractional Hilbert transform, a generalization of Hilbert transform from integral order to fractional order, extends the application fields. Firstly, generalized Hilbert transform is defined in the frequency domain, and it can be used to construct a new kind of analytic signal—generalized analytic signal. Then basic properties and digital realization of ideal generalized digital Hilbert transformer are investigated from the viewpoint of digital signal processing. Finally digital FIR filter design using window method and frequency sampling method are studied, and error analysis is given.

**Key words** fractional Hilbert transform; generalized analytic signal; FIR filter; error analysis

Hilbert变换在工程上被称为90°移相变换器<sup>[1]</sup>, 其实质就是对信号的正频部分移相 $-\pi/2$  rad, 负频部分移相 $\pi/2$  rad, 区别于普通的移相变换, 一般称之为Hilbert移相变换。它在许多领域, 特别是信号处理、通信领域得到广泛应用<sup>[1~5]</sup>。近年来, 随着现代信号处理的向前发展, 人们从不同的研究领域和应用角度出发, 提出了拓展经典Hilbert变换, 也即将其由整数阶推广到分数阶, 以至于整个实数阶的要求。这样得到的广义Hilbert变换, 即任意角度的Hilbert移相变换, 可以用来构造一类广义解析信号, 丰富了实信号的解析表示形式, 也可以用来进行包络提取和相位分析, 除此之外还有很多其他方面的应用, 比如: 1) 利用广义解析信号构造保密通信系统<sup>[6]</sup>; 2) 子波构造, 特别是实序列信号的解析子波分析<sup>[4,7,8,11]</sup>; 3) 分数阶计算及其数字实现<sup>[9,10]</sup>等。因此深入细致地研究广义Hilbert变换及其数字实现, 无论在理论上, 还是对于许多实际应用都是很有必要的。

### 1 广义Hilbert变换

如果信号 $s(t) \in L^2(\mathbf{R})$ , 其傅里叶变换 $\hat{s}(\dot{U}) = F\{s(t)\} = \int_{\mathbf{R}} s(t)e^{-i\dot{U}t} dt$ , 其中 $\dot{U}$ 表示信号的模拟角频率,  $F$ 为傅里叶变换算子, 则 $s(t)$ 和 $\hat{s}(\dot{U})$ 是信号的一对等价表示。

实信号  $s(t)$  的Hilbert变换(HT), 也即一阶Hilbert变换定义为:

$$s_{\text{HT}}(t) = H\{s(t)\} = s(t) * h(t) = \int_{t=-\infty}^{\infty} s(\tau) / \pi(t - \tau) d\tau \quad (1)$$

式中  $H$  为希尔伯特变换算子;  $h(t) = 1/\pi t$ 。式(1)在频域的等价形式为:

$$\hat{s}_{\text{HT}}(\dot{U}) = \hat{s}(\dot{U})\hat{h}(\dot{U}) \quad (2)$$

式中  $\hat{h}(\dot{U}) = -i \operatorname{sgn}(\dot{U})$ 。重复  $k$  次  $H$  运算得到  $k$  阶Hilbert变换算子  $H_k = H^k$ 。对  $k$  阶希尔伯特变换有:

$$F\{H_k s(t)\} = F\{s(t)\} \cdot [-i \operatorname{sgn}(\dot{U})]^k \quad (3)$$

将上式中的  $k$  换成实数  $v \in (-\infty, \infty)$  得到的算子  $H_v = H^v$  对应的传递(乘子)函数为:

$$\hat{h}_v(\dot{U}) = \begin{cases} \exp(-iv\pi/2), & \dot{U} > 0 \\ [\exp(-iv\pi/2) + \exp(iv\pi/2)]/2 & \dot{U} = 0 \\ \exp(iv\pi/2), & \dot{U} < 0 \end{cases} = \cos(v\pi/2) - i \sin(v\pi/2) \cdot \operatorname{sgn}(\dot{U}), v \in (-\infty, \infty) \quad (4)$$

因此算子  $H_v$  可分解成如下形式

$$H_v = \cos(v\pi/2) \cdot I + \sin(v\pi/2) \cdot H \quad v \in (-\infty, \infty) \quad (5)$$

式中  $I$  为恒等算子。实数  $v$  取正整数时, 就得到通常意义下的整数阶HT算子, 并且算子  $H_v$  关于  $v$  是连续的, 是整数阶希尔伯特变换算子的连续内插, 称之为广义HT算子, 相应的变换

$$H_v s(t) = s_v(t) = \cos(v\pi/2) \cdot s(t) + \sin(v\pi/2) \cdot s_{\text{HT}}(t) \quad v \in (-\infty, \infty) \quad (6)$$

称为函数  $s(t)$  的广义Hilbert变换<sup>[7,8,12]</sup>, 其中  $v$  为广义Hilbert变换的阶数, 与阶数  $v$  对应的Hilbert移相的角度为  $f_v = v\pi/2$ 。

当阶数  $v = \pm 0.2, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.2, \pm 1.5, \pm 1.8, \pm 2$  时, 矩形信号的相应的广义Hilbert变换时域波形如图1所示。

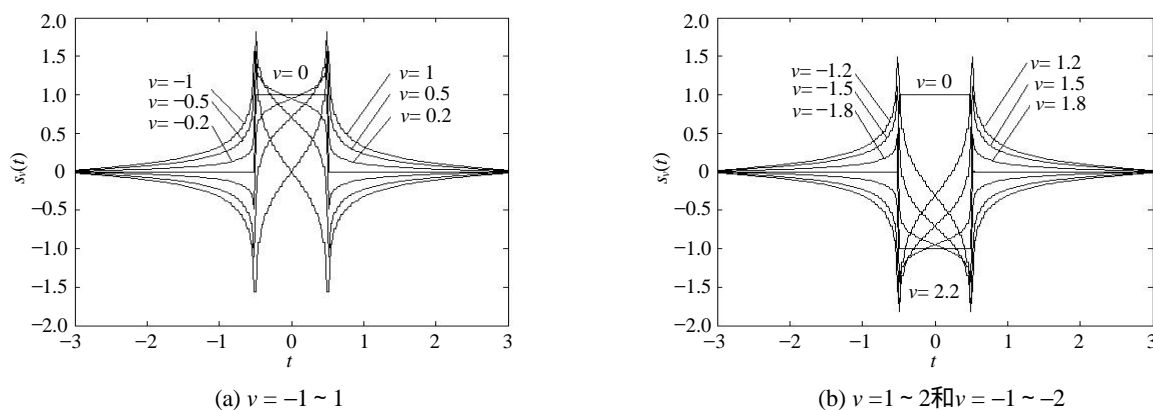


图1 矩形信号的广义Hilbert变换

## 2 理想的广义数字Hilbert变换器

根据数字信号处理的理论, 理想广义Hilbert变换器  $h_v$  对应的滤波函数  $H_v(\omega) = \sum_n h_v[n]e^{-i\omega n}$  为:

$$H_v(\omega) = \begin{cases} \exp(-iv\pi/2) & 0 < \omega < \pi \\ [\exp(-iv\pi/2) + \exp(iv\pi/2)]/2 = \cos(v\pi/2) & \omega = 0, \pm\pi \\ \exp(iv\pi/2) & -\pi < \omega < 0 \end{cases} \quad (7)$$

式中  $\omega$  表示信号的数字频率。其滤波器系数

$$h_v[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_v(\omega) e^{i\omega n} d\omega = \begin{cases} \cos(v\pi/2) & n = 0 \\ \sin(v\pi/2) \cdot \frac{2 \sin^2(n\pi/2)}{n\pi} & n \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

容易验证, 理想的广义数字Hilbert变换器  $h_v$  ( $-\infty < v < \infty$ ) 是非紧支的, 并且具有以下一些基本性质:

- 1) 有界性  $|h_v[n]| \leq 1/2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |\exp[-iv\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega)]| d\omega = 1 < \infty, n \in Z$ ; (9)

- 2) 实值性  $h_v[n] \in R, -\infty < v < \infty$ ; (10)

3) 连续性  $\lim_{v_1 \rightarrow v_2} h_{v_1} = h_{v_2}, -\infty < v_1, v_2 < \infty ;$  (11)

4) 周期性  $h_v = h_{v+4}, -\infty < v < \infty ;$  (12)

5) 可加性  $h_{v_1+v_2} = h_{v_1} * h_{v_2}, -\infty < v_1, v_2 < \infty ;$  (13)

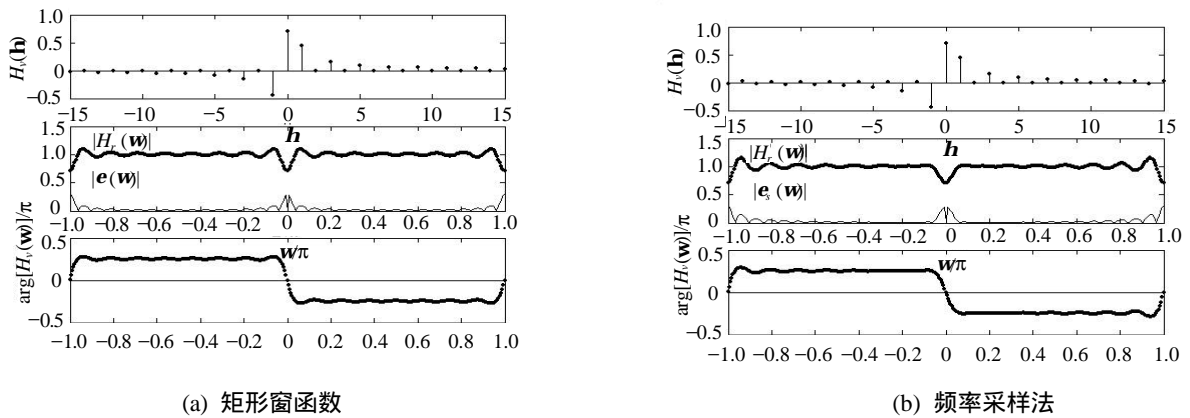
6) 能量归一化性  $E_v = \sum_{n \in Z} |h_v[n]|^2 = 1 ;$  (14)

7) 收敛性 在  $v \neq 2k, k \in Z$  时, 序列  $h_v$  是收敛而非绝对收敛的; 在  $v = 2k, k \in Z$  时, 序列  $h_v$  退化为单位采样序列  $d[n] (v = 4k)$  或者  $-d[n] (v = 4k - 2)$ , 是绝对收敛的。

### 3 FIR广义数字Hilbert变换器的设计与误差分析

理想的广义Hilbert变换数字滤波器是非因果无限冲击响应(IIR)滤波器, 本文只考察常用的有限冲击响应(FIR)广义数字Hilbert变换器设计问题, 最常用的方法是窗函数法和频率采样法, 取滤波器长度  $L = 2N + 1$ 。

图2给出了  $v = 0.5, N = 15$  时分别采用矩形窗函数法和频率采样法设计FIR滤波器的滤波器系数, 幅度响应及其误差, 相位响应曲线。



(a) 矩形窗函数

(b) 频率采样法

图2  $v = 0.5, N = 15$  时FIR滤波器设计的滤波器系数, 幅度响应, 相位响应曲线

用  $H_{vd}(w)$  和  $h_{vd}(n)$  表示所设计的滤波器的传递函数和滤波器系数, 则  $H_{vd}(w)$  逼近理想广义数字Hilbert变换器的绝对误差函数为

$$e_v(w) = |H_v(w) - H_{vd}(w)|, -\infty < v < \infty \tag{15}$$

逼近精度可以用极大绝对误差  $e_{v,max} = \max_{w \in [-0.5, 0.5]} [e_v(w)]$  来衡量, 并采用平均误差

$$S_{1v} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_v(w) dw \tag{16}$$

和均方误差(误差能量)

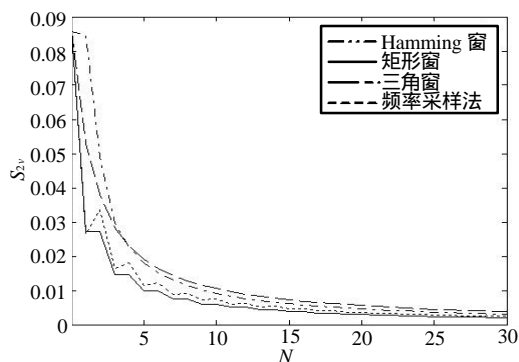
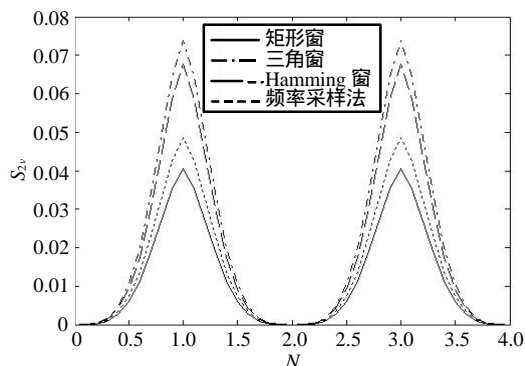
$$S_{2v} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_v^2(w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H_v(w) - H_{vd}(w)|^2 dw = \sum_{n=-N}^N |h_v(n) - h_{vd}(n)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-N-1} h_v^2(n) + \sum_{n=N+1}^{\infty} h_v^2(n) \tag{17}$$

来衡量逼近程度的总体性能。

图3给出了  $v = 0.5$  时, 随着  $N$  的不断增大, 分别采用几种典型窗函数和用频率采样法设计FIR滤波器时的均方误差曲线。

图4给出了  $N = 10$  时, 随着  $v$  的变化, 分别采用几种典型窗函数和用频率采样法设计FIR滤波器时的均方误差曲线。

数值分析结果表明, 这两种设计方法的设计误差主要集中在甚低频(不包括零频)和低频附近。当  $0 < v < 1$  或  $2 < v < 3$  时, 随着  $v$  的逐渐增大误差逐渐增大, 当  $1 < v < 2$  或  $3 < v < 4$  时, 随着  $v$  的逐渐增大误差逐渐减小, 由式(12)中  $h_v$  的周期性可以得到  $v$  取其他值时的情况。随着窗口宽度或者采样点数的增加, 误差逐渐减小。

图3  $\nu=0.5$ 时随 $N$ 变化的均方误差曲线图4  $N=10$ 时随 $\nu$ 变化的均方误差曲线

## 4 结束语

本文用数字滤波器的方法实现广义Hilbert变换,给出了滤波器系数的基本性质。利用分数Hilbert变换,推广解析信号可以得到广义解析信号,限于篇幅,另文专述广义解析信号的相关性质及应用。广义Hilbert变换是整数阶Hilbert变换的一种推广,可以应用在分数微积分,广义化子波构造,通信传输和边缘检测等诸多领域,且必定还有信号处理方面的其他应用等待我们去不断发掘。

## 参 考 文 献

- [1] 奥本海姆 A V, 谢弗 R W, 巴克 J R. 离散数字信号处理(第2版)[M]. 刘树棠, 黄建国. 译. 西安: 西安交通大学出版社, 2001
- [2] 科恩 L. 时频分析: 理论与应用[M]. 白居宪译. 西安: 西安交通大学出版社, 1998
- [3] 张贤达, 保 铮. 通信信号处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2000
- [4] 袁 晓, 虞厥邦. 复解析小波变换与语音信号包络提取和分析[J]. 电子学报, 1999, 27(5): 142~144
- [5] Pei S C, Shyu J J. Design of FIR Hilbert transformers and differentiators by eigenfilter[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems, 1988,35(11):1 457-1 461
- [6] Tseng C C, Pei S C. Design and application of discrete-time fractional Hilbert transformer[J]. IEEE Trans. Circuits and Systems- , 2000,47(12): 1 529-1 533
- [7] 袁 晓, 陈向东, 李齐良, 等. 微分算子与子波构造[J]. 电子学报, 2002, 30(5): 771-773
- [8] 袁 晓, 陈向东, 王俊波. 经典规范正交子波的一种简单广义化方法以及应用[J]. 电子与信息学报, 2002, 24(12): 1 870-1 878
- [9] 袁 晓, 陈向东, 李齐良, 等. 广义Harr子波[J]. 电子科技大学学报, 2002, 31(1): 19-23
- [10] 袁 晓, 张红雨, 虞厥邦. 分数导数与数字微分器设计[J]. 电子学报, 2004, 32(10): 1 658-1 665
- [11] 陶德元, 袁 晓, 何小海. 一类复子波的时-频局域化特征分析[J]. 电子科技大学学报, 2001, 30(1): 21-25
- [12] 魏永豪, 袁 晓. 广义希尔伯特变换及其数学滤波器设计[J]. 首届西部青年通信学术会议论文集, 成都: 电子科技大学, 2004: 469-474

编 辑 徐安玉