第 34 卷　第 2 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.34　No.2
2005 年 4 月　　Journal of UEST of China　　Apr. 2005

非共振阻尼介观耦合电路中的量子效应

梁麦林，张文清，袁　兵
(天津大学理学院应用物理系　天津　300072)

【摘要】研究了两个分回路中电路参数即电容和电感的不同对有阻尼的介观耦合电路中量子涨落的影响。计算中考虑了电阻产生的物理机制即电子与声子的相互作用。两个分回路电路参数的不同会使一个分回路中的量子涨落减小，另一个分回路中的增加。结果表明，无论是电容耦合还是电感耦合都会使耦合部分的电荷涨落得到压缩，而耦合部分电流的量子涨落得不到压缩。

关　键　词　耦合电路；阻尼；量子涨落；非共振；声子
中图分类号　TN201　　文献标识码　A

Quantum Effects in the Non-Resonant Damped Mesoscopic Coupled Electric Circuits

LIANG Mai-lin，ZHANG Wen-qing，YUAN Bing
(Department of Applied Physics, School of Science, Tianjin University　Tianjin　300072)

Abstract　The effects of the difference of circuit parameters or capacitances and inductances on the quantum fluctuations in the non-resonant damped mesoscopic coupled electric circuits were studied. In the calculations, the physical mechanism of the generation of the resistance or the interaction between electrons and phonons was considered. The difference of the circuit parameters in the two component circuits makes the quantum fluctuations in one component circuit smaller and that in the other larger. The results also show that both capacitance coupling and inductance coupling will cause the quantum fluctuations of the electric charge in the coupling part squeezed. But there is no squeezing for the electric current in the coupling part.

Key words　coupled electric circuit;　damping;　quantum fluctuations;　non-resonant;　phonon

随着电子器件的小型化，电路中的量子效应越来越显著。人们对电路的基本组分LC电路，电容耦合电路，电感耦合电路中的量子效应做了许多研究[1~6]。关于有阻尼的电子电路，采用不同的唯象手段对体系也进行了量子化[7~12]。文献[13,14]则根据电阻产生的物理机制即电子与声子的相互作用给出了RLC电路以及电感耦合电路的量子化方法。对于耦合电路，文献[14]讨论的是两个分回路中的电路参数即电容和电感完全相同的情况。通过进一步的研究发现，即使两个分回路中的电路参数不同，也可以得到精确结果，并且允许耦合部分同时存在电容(形成电容和电感耦合电路)。这使能够对阻尼电路的性质有更多了解。

1　量子的运动方程

利用文献[14]中阻尼电感耦合电路的运动方程，可以进一步写出耦合部分同时存在电容C 时电路的运动方程：

收稿日期：2003 – 03 – 17
基金项目：国家自然科学基金资助项目(20176035)
作者简介：梁麦林(1963 –)，男，博士，教授，主要从事介观物理和量子光学方面的研究.

$$L_1\frac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q_1}{C_1}+\frac{q_1-q}{C}+L(\frac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2})+R_1\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=0 \tag{1a}$$

$$L_2\frac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2}+\frac{q_2}{C_2}-\frac{q_1-q_2}{C}-L(\frac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2})+R_2\frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=0 \tag{1b}$$

由于电源对电路的量子涨落无影响[13, 14]，这里令各电源为0。式(1)中q_i, L_i, C_i，R_i，$i=1, 2$ 分别是两个分回路中的电荷、电感、电容和电阻。L 是耦合部分的电感。电阻是电子与晶格振动或声子的相互作用产生的。声子能够用谐振子热库来描述。用 x_j，y_l 分别表示两个分回路热库中的谐振子坐标，按照文献[13,14]中的方法可得相应的量子运动方程：

$$\begin{cases} L_1\dfrac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2}\dfrac{q_1-q_2}{C}+L(\dfrac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2})+R_1\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}=f_1(t) \\ L_2\dfrac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{q_2}{C_2}+\dfrac{q_2-q_1}{C}+L(\dfrac{\mathrm{d}^2q_2}{\mathrm{d}t^2}-\dfrac{\mathrm{d}^2q_1}{\mathrm{d}t^2})+R_2\dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=f_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

其中：

$$\begin{cases} f_1(t)=-\sum\limits_j C_j\left[x_{j0}\cos w_jt+\left(\dfrac{\mathrm{d}x_{j0}}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{\sin w_jt}{w_j}\right] \\ f_2(t)=-\sum\limits_l D_l\left[y_{l0}\cos w_lt+\left(\dfrac{\mathrm{d}y_{l0}}{\mathrm{d}t}\right)\dfrac{\sin w_lt}{w_l}\right] \end{cases} \tag{3}$$

式中　$f_{1,2}(t)$ 是热库中振子布朗运动产生的力，下脚标中的0表示相应物理量的初始值。

2　量子涨落

对于无阻尼情况，引入以下简正坐标可以使体系解耦[6]：

$$\begin{cases} Q_1=r\,q_1\cos j-q_2\dfrac{\sin j}{r} \\ Q_2=r\,q_1\sin j+q_2\dfrac{\cos j}{r} \end{cases} \tag{4}$$

式中　角度 j 和参量 r 的形式与文献[6]中的相同。角度 j 的变化范围可取为 $0 \le j < p/2$。在 $R_1/L_1=R_2/L_2=h$ 的条件下，由方程(2)，可得：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2Q_2}{\mathrm{d}t^2}+h\dfrac{\mathrm{d}Q_2}{\mathrm{d}t}+w_2^2Q_2=f_1(t)\dfrac{r\sin j}{L_1}+f_2(t)\dfrac{\cos j}{rL_2} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2Q_1}{\mathrm{d}t^2}+h\dfrac{\mathrm{d}Q_1}{\mathrm{d}t}+w_1^2Q_1=f_1(t)\dfrac{r\cos j}{L_1}-f_2(t)\dfrac{\sin j}{rL_2} \end{cases} \tag{5}$$

式中　频率w_1和w_2是无阻尼系统的简正频率[6]。式(5)中坐标Q_1和Q_2不再有耦合，即方程(2)被解耦。长时间后方程(5)达到稳态后的解可以写为：

$$\begin{cases} Q_1=Q_x(t)\dfrac{r\sin j}{L_1}+Q_y(t)\dfrac{\cos j}{rL_2} \\ Q_2=q_x(t)\dfrac{r\cos j}{L_1}-q_y(t)\dfrac{\sin j}{rL_2} \end{cases} \tag{6}$$

式中　$q_x(t)$, $Q_x(t)$和$q_y(t)$, $Q_y(t)$ 分别是由 $f_1(t)$和 $f_2(t)$引起的解, 形式如下[13,14]：

$$Q_x(t)=\sum_j[b_{j1}x_{j0}+b_{j2}(\mathrm{d}x_{j0}/\mathrm{d}t)] \tag{7a}$$

$$Q_y(t)=\sum_j[b_{j1}y_{j0}+b_{j2}(\mathrm{d}y_{j0}/\mathrm{d}t)] \tag{7b}$$

$$q_x(t)=\sum_j[d_{j1}x_{j0}+d_{j2}(\mathrm{d}x_{j0}/\mathrm{d}t)] \tag{7c}$$

$$q_y(t)=\sum_j [d_{j1}y_{j0}+d_{j2}(\mathrm{d}y_{j0}/\mathrm{d}t)] \tag{7d}$$

系数：

$$\begin{cases} b_{j1}=-\dfrac{C_j}{(w_1{}^2-w_j{}^2)^2+h^2w_j{}^2}[(w_1{}^2-w_j{}^2)\cos w_j t+hw_j\sin w_j t] \\ b_{j2}=-\dfrac{C_j}{(w_1{}^2-w_j{}^2)^2+h^2w_j{}^2}[-h\cos w_j t+\dfrac{w_1{}^2-w_j{}^2}{w_j}\sin w_j t] \end{cases} \tag{8a}$$

$$\begin{cases} d_{j1}=-\dfrac{C_j}{(w_2{}^2-w_j{}^2)^2+h^2w_j{}^2}[(w_2{}^2-w_j{}^2)\cos w_j t+hw_j\sin w_j t] \\ d_{j2}=-\dfrac{C_j}{(w_2{}^2-w_j{}^2)^2+h^2w_j{}^2}[-h\cos w_j t+\dfrac{w_2{}^2-w_j{}^2}{w_j}\sin w_j t] \end{cases} \tag{8b}$$

这里将各系数中的电感放在了式(6)**中。按照文献**[13,14]**中的方法算出：**

$$\begin{cases} \langle \Delta Q_x^2\rangle=L_1\langle \Delta Q_0^2\rangle,\ \langle \Delta q_x^2\rangle=L_1\langle \Delta q_0^2\rangle \\ \langle \Delta Q_y^2\rangle=L_2\langle \Delta Q_0^2\rangle,\ \langle \Delta q_y^2\rangle=L_2\langle \Delta q_0^2\rangle \\ \langle (q_yQ_y+Q_yq_y)\rangle=(L_2/L_1)\langle (q_xQ_x+Q_xq_x)\rangle \end{cases} \tag{9}$$

其中[13]**：**

$$\langle \Delta Q_0^2\rangle=\frac{\mathrm{h}}{2ð\sqrt{w_1{}^2-h^2/4}}(\frac{ð}{2}+a_1),\ a_1=\arctan\frac{(w_1^2-h^2/2)}{h\sqrt{w_1^2-h^2/4}} \tag{10a}$$

$$\langle \Delta q_0^2\rangle=\frac{\mathrm{h}}{2ð\sqrt{w_2{}^2-h^2/4}}(\frac{ð}{2}+a_2),\ a_2=\arctan\frac{w_2^2-h^2/2)}{h\sqrt{w_2^2-h^2/4}} \tag{10b}$$

通过式(4)**以及式**(6)**～**(9)**的结果，可以求出量子张落。分回路中的涨落为：**

$$\begin{cases} \langle \Delta q_1^2\rangle=\langle \Delta q_0^2\rangle\left(\dfrac{\cos^2 j}{L_1}+\dfrac{\sin^2 j}{r^4L_2}\right)\sin^2 j+\langle \Delta Q_0^2\rangle\left(\dfrac{\sin^2 j}{L_1}+\dfrac{\cos^2 j}{r^4L_2}\right)\cos^2 j+ \\ \qquad \dfrac{1}{L_1}\langle (q_xQ_x+Q_xq_x)\rangle\left(\dfrac{1}{L_1}-\dfrac{1}{r^4L_2}\right)\sin^2 j\cos^2 j \\ \langle \Delta q_2^2\rangle=\langle \Delta q_0^2\rangle\left(\dfrac{\sin^2 j}{L_2}+\dfrac{r^4\cos^2 j}{L_1}\right)\cos^2 j+\langle \Delta Q_0^2\rangle\left(\dfrac{\cos^2 j}{L_2}+\dfrac{r^4\sin^2 j}{L_1}\right)\sin^2 j- \\ \qquad \dfrac{r^4}{L_1}\langle (q_xQ_x+Q_xq_x)\rangle\left(\dfrac{1}{L_1}-\dfrac{1}{r^4L_2}\right)\sin^2 j\cos^2 j \end{cases} \tag{11}$$

在式(11)**中，包含**$\langle (q_xQ_x+Q_xq_x)\rangle$**的项是由于两个分回路中的电路参数不同即**$L_1\neq L_2$**，**$C_1\neq C_2$**引起的。该项使两个分回路中的涨落**$\langle \Delta q_1^2\rangle$**和**$\langle \Delta q_2^2\rangle$**一个增加，另一个减小。对于电容耦合**$L\to 0$**，**$r^4=L_1/L_2$**，包含**$\langle (q_xQ_x+Q_xq_x)\rangle$**的项消失，对于电感耦合**$C\to\infty$**，**$r^4=C_2/C_1$**，当两个分回路中的频率相等即**$1/\sqrt{L_1C_1}=1/\sqrt{L_2C_2}$**时该项也消失。耦合部分电荷**$q=q_2-q_1$**的量子涨落与分回路中的涨落**$\langle \Delta q_1^2\rangle$**和**$\langle \Delta q_2^2\rangle$**之差为：**

$$\begin{aligned} \langle \Delta q^2\rangle-\langle \Delta q_1^2\rangle-\langle \Delta q_2^2\rangle=&-\langle \Delta q_0^2\rangle\left(\frac{1}{L_1}r^2\cos^2 j+\frac{1}{r^2L_2}\sin^2 j\right)\sin j\cos j+ \\ &\langle \Delta Q_0^2\rangle\left(\frac{1}{L_1}r^2\sin^2 j+\frac{1}{r^2L_2}\cos^2 j\right)^2\sin j\cos j- \\ &\langle (q_xQ_x+Q_xq_x)\rangle\left(\frac{r^2}{L_1}-\frac{1}{r^2L_2}\right)\frac{\sin 4j}{4L_1} \end{aligned} \tag{12}$$

可以算出，在无耦合的情况下$\langle \Delta q^2\rangle=\langle \Delta q_1^2\rangle+\langle \Delta q_2^2\rangle$**即此时耦合部分的量子涨落等于分回路中的涨落之和。**

耦合使耦合处的量子涨落不再等于两分回路中的涨落之和。当耦合电感为0即 $L \to 0$ 时，电路变成电容耦合电路，式(12)变成：

$$\left\langle \Delta q^2 \right\rangle - \left\langle \Delta q_1^2 \right\rangle - \left\langle \Delta q_2^2 \right\rangle = \left(\left\langle \Delta Q_0^2 \right\rangle - \left\langle \Delta q_0^2 \right\rangle \right) \frac{\sin 2j}{2\sqrt{L_1 L_2}} \tag{13}$$

其他电路参数可以任意变化。当 $C \to \infty$ 时，电路变成电感耦合电路，如果两个分回路中的频率相等 $\frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} = w_0$，式(12)成为：

$$\left\langle \Delta q^2 \right\rangle - \left\langle \Delta q_1^2 \right\rangle - \left\langle \Delta q_2^2 \right\rangle = \left(\left\langle \Delta Q_0^2 \right\rangle - \left\langle \Delta q_0^2 \right\rangle \right) \frac{\sin 2j}{2} w_0^2 \sqrt{C_2 C_1} \tag{14}$$

对于无阻尼系统的简正频率 w_1 和 w_2 [6]，无论是电容耦合，还是电感耦合，都有结果 $w_1 > w_2$，从而使 $\left\langle \Delta Q_0^2 \right\rangle < \left\langle \Delta q_0^2 \right\rangle$，也使耦合部分的量子涨落小于两分回路中的涨落之和(注意，由于前边已取 $0 < 2j < \pi$，所以 $\sin 2j > 0$)。如果将无耦合的情况作为标准，那么无论是电容耦合还是电感耦合都可以使耦合部分的电荷涨落得到压缩。对于电流的量子涨落也可以做类似讨论，结果表明电容和电感耦合使耦合部分电流的量子涨落大于两个分回路中的涨落之和。

3　结 束 语

在考虑电子与声子相互作用的基础上，对有阻尼的非共振介观耦合电路中的量子涨落进行了研究。两个分回路电路参数的不同可以使一个分回路中的量子涨落减小，另一个分回路中的增加。电容或者电感耦合都可以使耦合部分电荷的量子涨落得到压缩。

本文研究工作得到刘微应用数学基金的资助。在此表示感谢。

参　考　文　献

[1] Louisell W H. Quantum Statistical Properties of Radiation[M]. New York: John Wily, 1973

[2] 陈　斌, 李有泉. 介观耦合电路的量子压缩效应[J]. 科学通报, 1996, 41(14): 1 275-1 277

[3] 王继锁, 刘堂昆, 詹明生. 平移压缩Fock态下介观电容耦合电路的量子涨落[J]. 物理学报, 2000, 49(11): 2 271-2 275

[4]Fan Hongyi, Liang Xianting. Quantum fluctuation in thermal vacuum state for mesoscopic LC electric circuit[J]. Chin. Phys. Lett, 2000, 17(3): 174-176

[5] Li Youquan, Chen Bin. Quantum theory of mesoscopic electrical circuits[J]. Phys.Rev.B, 1996, 53(16): 4 027- 4 032

[6] 所　平, 张　俭, 梁麦林. 电容和电感耦合对电路中量子涨落的不同影响[J]. 天津大学学报, 2002, 35(增刊): 52-54

[7] 高守恩, 陈　斌. 有源RLC回路的量子化[J]. 大学物理, 1994, 13(3): 12-14

[8] Chen B, Li Y Q, Fang H, et al. Quantum effects in a mesoscopic circuit [J]. Phys. Lett. A, 1995, 205(1): 121-124

[9] 陈　斌, 方　挥, 焦正宽, 等. 介观电路中电荷电流的量子涨落[J]. 科学通报, 1996, 41(13): 1 170-1 172

[10] Wang Xiao-guang, Pan Shao-hua. Quantum fluctuations of a mesoscopic RLC circuit in a displaced squeezed Fock stste[J]. Chin.Phys.Lett, 2000, 17(3): 170-173

[11] 顾永建. 压缩真空态下介观RLC电路中电荷和电流的量子涨落[J]. 物理学报, 2000, 49(5): 965-967

[12] 龙超云, 刘　波, 王心福. 耗散介观电容耦合电路的量子涨落[J]. 物理学报, 2002, 51(1): 159-162

[13] 梁麦林, 袁　兵. 关于介观有源RLC电路的量子化及量子涨落[J]. 量子电子学报, 2002, 19(1): 53-56

[14] 梁麦林, 袁　兵. 分回路中有电阻时电感耦合电路的量子涨落[J]. 北京理工大学学报, 2002, 22(6): 727- 730

编　辑　孙晓丹