第 34 卷 第 2 期 电子科技大学学报 Vol.34 No.2
2005 年 4 月 Journal of UEST of China Apr. 2005

对一类最小图的研究

杨 春[1]，张先迪[1]，孙世新[2]

(1. 电子科技大学应用数学学院 成都 610054; 2. 电子科技大学计算机科学与工程学院 成都 610054)

【摘要】对一个与并行结构和通信网络设计密切相关的图论公开性问题进行了研究。讨论了图的结点数为n，连通度至少为k，k-直径至多为d的条件下的最小图问题，给出了一般条件下最小图边数条数的上、下界，在此基础上，得到了两种条件下最小图边数的计算公式，结合已有的图论结果，对文中所提到的最小图进行了构造。

关 键 词 图; 公开性问题; 连通度; k-直径; 直径

中图分类号 O157.6 文献标识码 A

Study of One Kind of Graphs

YANG Chun[1]，ZHANG Xian-di[1]，SUN Shi-xin[2]

(1. School of Applied Mathematics, UEST of China Chendu 610054;

2. School of Computer Science Science and Engineering, UEST of China Chendu 610054)

Abstract One of the open problems in the graph theory is to find the minimum number of edges required for a graph of order n. A class of graphs with connectivity of at least k and k-diameter of at most d is studied in this paper, and an upper and a lower bound of the minimum edges of the graphs under general conditions are offered. Based on this, the calculation formulas of the minimum edges in two specific situations are also given. In addition we suggest the approaches to costruct the minimum networks as mentioned above.

Key words graph; open pronlem; connectivity ; k- diameter

在并行结构和通信网络的设计中，往往希望构造一个满足一定条件的最小网络，即满足条件链路最少的网络，以减少网络材料开销。若把网络结点看着图的顶点，链路看着图的边，一个网络可以模型于一个图。本文将对图的顶点数为n，连通度至少为k，k-直径至多为d的条件下的最小图的边数问题进行分析研究。

1 有关定义

在文献[1]中介绍了有关图的容器(Container)理论和它的发展现状。容器是对单路径的扩充，在此基础上，扩充了图的连通度和直径的概念，提出了图的宽距离和宽直径的概念。设G表示一无向简单图(图中无自环、无平行边)，u、v表示图G中的顶点(也称为结点)，$V(G)$表示图G中的顶点集，概念定义如下[1]。

定义 1 图G的两顶点间的一个容器$C(u,v)$是u、v间所有顶点不重合的路集合；容器$C(u,v)$的宽度是指该集合的势，记为$w(C(u,v))$；容器$C(u,v)$的长度是指这个路集合中最长路的长度，记为$l(C(u,v))$。

定义 2 图G中的两顶点u、v之间的w-宽距离是指u、v之间所有宽为w的容器长度的最小值，记为$d_w(u,v)$，即：$d_w(u,v)=\min\{l(C_w(u,v)), u\neq v\}$，其中$C_w(u,v)$表示$u$、$v$之间宽度为$w$的容器。

收稿日期：2004－05－14

作者简介：杨 春(1965－)，男，在职博士生，主要从事图论与并行算法方面的研究.

定义 3　图G中两顶点u、v之间的最优容器是指u、v间所有宽度相同的容器中长度最小的那一个。

定义 4　图G的w-宽直径是指图G中所有点对u、v间的宽为w的容器的长度的最大值，即：

$$d_w(G)=\max\left\{d_w(u,v)\middle|u,v\in V(G),u\neq v\right\}$$

图G的w-宽直径$d_w(G)$在网络中的意义是描述网络中信息分包传送的时间延迟。所谓信息的分包传送是指当网络的传输带宽有限时，为加快数据传输，可以把需要传送的数据拆成w个小包，然后沿w条内点不相交路分别同时传输。

图G的连通度是指使图G不连通而需去掉的最少顶点数目，n阶完全图的连通度定义为$n-1$如果图G的连通度为k，则记为$k(G)$。

明格尔定理指出：一个图 是k连通的，当且仅当图的任何一对结点间至少存在一个宽为k的容器。

定义 5　设k,d,n为三个正整数，且$d<n$，$k<n$，定义图集：

$$H(k,d,n)=\left\{G\middle\|V(G)\middle|=n,G\text{的连通度}\geq k,d_k(G)\leq d\right\}$$

定义 6　$e(G)$表示图G的边数，定义：$h(k,d,n)=\min\left\{e(G)\middle|G\in H(k,d,n)\right\}$。

2　主要结果

引理 1[2]　设G为图，$d(v)$表示G中顶点v的度数，则：

$$2e(G)=\sum_{v\in V(G)}d(v) \tag{1}$$

引理 2[2]　设G为图，$d(G)$表示G中顶点的最小度，$k(G)$表示G的连通度，则：

$$k(G)\leq d(G) \tag{2}$$

定理 1　对任意的正整数k，d，n，且$k<n$，$d<n$有：

$$\left\{\frac{kn}{2}\right\}\leq h(k,d,n)\leq\frac{n(n-1)}{2} \tag{3}$$

证明　对$\forall G\in H(k,d,n)$，由式(1)、(2)有：

$$2e(G)=\sum_{v\in V(G)}\deg(v)\geq\longleftrightarrow d(G)n\geq kn \tag{4}$$

于是得：

$$e(G)\geq\left\{\frac{kn}{2}\right\} \tag{5}$$

若令 $k=n-1$, $d=2$, 则 $H(k,d,n)=K_n$，因此有：

$$h(k,d,n)=\frac{n(n-1)}{2} \tag{6}$$

由式(5)、(6)便获得定理1的证明。

引理 3[3]　若n阶简单图是k连通的，则其k直径满足：

$$d_k(G)\leq n-k+1 \tag{7}$$

令$f(n,k)=\max\left\{d_k(G)\middle|G\text{是}n\text{阶}k\text{连通图}\right\}$：

引理 4[3]　设$2\leq k\leq n-1$，则$f(n,k)=n-k+1$，若$k\geq\frac{n}{2}+2\geq5$，且kn为偶数，或者$n=2k-2\geq4$，则存在n阶k连通k正则图G,满足$d_k(G)=n-k+1$。

定理 2　设$2\leq k\leq n-1$，则$f(n,k)=n-k+1$，若$k\geq\frac{n}{2}+2\geq5$且kn为偶数，或者$n=2k-2\geq4$，则有：

$$h(k,n-k+1,n)=\frac{nk}{2} \tag{8}$$

证明　在定理2的条件下，由引理4，存在一个k连通，k正则的图G，使得$d_k(G)=n-k+1$即，$G\in H(k,n-k+1,n)$，因此可得：

$$h(k,n-k+1,n)\geq\frac{nk}{2} \tag{9}$$

由定理1得：

$$h(k,n-k+1,n)\leq\frac{nk}{2} \tag{10}$$

由式(9)、(10)可得式(8)。

由定理2，可以求出大量的$h(k,d,\text{n})$，如取n=100，k=52，d=49，则$h(52,49,100)$=2 600。

在定理2的条件下，可以构造出一类连通度至少为k，k-直径至多为n–k+1的n阶最小网络，该网络为连通度为k，k-直径为n–k+1，结点数为n的正则图，具体方法如下：

1) 若k=2，则满足连通度至少为2，2-直径至多为n–1的n阶网络的最小网络为n圈C_n；2) 若$k\geq3$，取一个k–2阶的2k–n–2的连通图H，构造联图：$G=C_{n-k+2}\vee H$，可以证明，该联图k-直径为：

$$d_k(G)=n-k+1 \tag{11}$$

事实上，对C_{n-k+2}中的两相邻顶点x与y，有$d_k(x,y)=(n-k+2)-1=n-k+1$，由宽直径的定义，有不等式$d_k(G)\geq d_k(x,y)=n-k+1$，再由式(7)便可得到式(11)。

为使G为k正则图，当k=3或n=2k–2时，取H为无边图，在其他情形下，取H为任何一个k–2阶的l-正则l连通图，其中$l=\max\{2,2k-n-2\}$。

引理 5[3] 若kn为偶数，且$k\geq3$，则：

$$f(n,k)\leq\frac{n}{2} \tag{12}$$

定理 3 设kn为偶数，且$k\geq3$，则：

$$h(k,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,n)=\frac{kn}{2} \tag{13}$$

证明 当$k\geq3$且kn为偶数时，存在Harary图$H_{k,n}$，由引理5有：

$$d_k(H_{k,n})\leq\frac{n}{2} \tag{14}$$

故有：

$$h(k,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,n)\leq\frac{kn}{2} \tag{15}$$

由定理1，有：

$$h(k,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,n)\geq\frac{kn}{2} \tag{16}$$

由式(15)、(16)可得式(13)。

定理3又给出了求大量$h(k,d,n)$的公式，如当k=3，d=50，n=100时，由式(13)得$h(3,50,100)$=150。

与式(13)对应的最小网络的构造可参见文献[2]。

最后，针对本文研究的问题，再提出一个相应的问题以供研究：求一个连通度为k，而k-直径为d (这里限制$k<n$，$d<n$，k，d均为正整数)的n阶最小网络。

参考文献

[1] Hsut D F. On container width and length in graphs, groups and networks[J]. Ieice Trans, Fundamentls, 1994, E77-A, (4): 668-680

[2] 邦迪JA, 默蒂USR著, 图论及其应用[M]. 吴望名译.北京: 科学出版社, 1984

[3] 张先迪, 李正良, 杨 春. 图论及其应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2005

编 辑 孙晓丹