第 34 卷　第 3 期　　电 子 科 技 大 学 学 报　　Vol.34　No.3
2005 年 6 月　　Journal　of　UEST　of　China　　Jun. 2005

离散型种群竞争模型的周期解

肖辉成[1]，杨晓松[2]

(1. 宜宾学院数学系　四川 宜宾　644007;　2. 重庆邮电学院非线性研究所　重庆　400065)

【摘要】研究了一类离散型种群生存竞争模型的周期解问题。利用射影几何中常用的齐次坐标记法，把非线性系统用逐次递推的线性形式来表示，得到了判别系统有最小正周期 m 的周期解的一个充要条件。该结果证明了系统不存在最小正周期m=2的周期解，得出了具有最小正周期m=3的周期解时系统的一般表达式和最小正周期m=3的一个判定定理。

关　键　词　离散系统;　齐次坐标;　周期解;　种群竞争模型

中图分类号　O193　　　文献标识码　A

Periodic Solution for Discrete Competition Model

XIAO Hui-cheng[1]，YANG Xiao-song[2]

(1. Department of Math Yibin University　Sichuan Yibin　644007;

2. Institute for Nonlinear Systems Chongqing University of Posts and Telecommunications　Chongqing　400065)

Abstract　In this paper, we study a class of discrete competition model, Us the homogeneous coordinates of projective geometry to establish the linear zed equations for the systems, present a sufficient and necessary conditions for this systems having periodic solutions with periodic. And us the result, we proof that there are not periodic solutions with two period for the systems; establish the generality equations having periodic solutions with period with three.

Key words　discrete systems;　homogeneous coordinates;　periodic solutions;　competition models

人们研究各种类型的离散模型，其中各种生物种群模型的研究受到了广泛关注[1~4]。文献[5]提出了一种已广泛应用于生态学的重要的种群生存竞争模型系统为：

$$x_i(n+1)=\lambda_i x_i(n)\Big/1+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j(n)\qquad i=1,2,\cdots,m \tag{1}$$

文献[6]研究了系统式(1)正平衡点的全局渐近稳定性，文献[7]对周期系数的系统作了很好的研究。种群模型周期解显然是一个重要的研究课题，且有广泛的应用价值，本文研究两个种群生存竞争模型：

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{\alpha x_n}{1+a_{11}x_n+a_{12}y_n} \\ y_{n+1}=\dfrac{\beta y_n}{1+a_{21}x_n+a_{22}y_n} \end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots, \tag{2}$$

式中　x_n, y_n 表示两个种群在第 n 代生长期密度，$x_n>0, y_n>0$，而 $x_0>0, y_0>0$ 为初始值；$\alpha>0, \beta>0$ 为两种群各自的增长比率，且 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 是正常数，表示种群间生存竞争强度。利用射影几何中常用的齐次坐

收稿日期：2003 – 09 – 15
作者简介：肖辉成(1948 –)，男，教授，主要从事动力系统，基础理论方面的研究.

标记法，把非线性系统式(2)用线性化表示，得到了逐次递推的线性方程组，利用线性代数的理论，得到了判别系统式(2)有最小正周期 m 的周期解的一个充要条件。利用这一结果，本文进一步证明了系统式(2)不存在最小正周期m=2的周期解；得出了系统式(2)有最小正周期m=3的周期解的一般表达式。

1　主要结果

为了简化运算，把非线性的有理分式形式(2)转化为线性表示形式，要引入齐次坐标的记法。在射影几何中，当引入无穷远元素后，为了解决无穷远点的坐标表示，引入了齐次坐标，对一维通常坐标 $\bar{x}$，引入一个二维非零向量(行或列)例 (x_1,x_2)或$(x_1,x_2)^\tau$，对于非齐次坐标 $\bar{x}$ 与齐次坐标的关系定义为 $\bar{x}=x_1:x_2$，当 $x_2=0$ 表示无穷远点，当 $x_2\neq 0$ 时，表示通常点有 $\bar{x}=x_1/x_2$。由于齐次坐标的不唯一性，规定 (x_1,x_2) 与 $(\rho x_1,\rho x_2),(\rho\neq 0)$ 表示同一点，故一般记 $\bar{x}\overset{\Delta}{=}(\rho x_1,\rho x_2)$ $(\rho\neq 0$ 为比例常数)特别 $x_2=1$ 时，$\bar{x}\overset{\Delta}{=}(\rho\bar{x},\rho)$，$(\rho\neq 0)$。

定理 1　系统式(2)有最小正周期 m 的周期解的充要条件是系数 $\alpha,\beta,a_{ij}\,(i,j=1,2)$，适合下列 $m\times 4$ 个方程组成的方程组为：

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ 1 \\ y_{j+1} \\ 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}(j)\begin{pmatrix} x_j \\ 1 \\ y_j \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

式中　$\boldsymbol{A}(j)$ 为四阶矩阵，其特征本文将在后面叙述，且不存在 $k<m$ 有 $x_k=x_0$，$y_k=y_0$，但有：

$$x_m=x_0,\quad y_m=y_0 \tag{4}$$

证明　沿用前述的齐次坐标记法,采用列向量形式来表示。$x_{j+1}\overset{\Delta}{=}\begin{pmatrix} k_{j+1}x_{j+1} \\ k_{j+1}1 \end{pmatrix}k_{j+1}\neq 0$，$y_{n+1}\overset{\Delta}{=}\begin{pmatrix} h_{j+1}y_{j+1} \\ h_{j+1}1 \end{pmatrix}h_{j+1}\neq 0$，

$\dfrac{\alpha x_j}{1+\alpha_{11}x_j+\alpha_{12}y_j}\overset{\Delta}{=}\begin{pmatrix} s_{j+1}\alpha x_j \\ s_{j+1}(1+\alpha_{11}x_j+\alpha_{12}y_j) \end{pmatrix}s_{j+1}\neq 0$，$\dfrac{\beta x_j}{1+\alpha_{21}x_j+\alpha_{22}y_j}\overset{\Delta}{=}\begin{pmatrix} t_{j+1}\beta y_j \\ t_{j+1}(1+\alpha_{21}x_j+\alpha_{22}y_j) \end{pmatrix}t_{j+1}\neq 0$。记为：

$$\begin{pmatrix} x_{j+1} \\ 1 \\ y_{j+1} \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_{j+1}\alpha & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{j+1}a_{11} & \lambda_{j+1} & \lambda_{j+1}a_{12} & 0 \\ \mu_{j+1}\beta & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{j+1}a_{21} & \mu_{j+1} & \mu_{j+1}a_{22} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_j \\ 1 \\ y_j \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

式中　$\lambda_{j+1}=s_{j+1}/k_{j+1}\neq 0$，$\mu_{j+1}=t_{j+1}/k_{j+1}\neq 0$，$j$ =0，1，2，3，…。这样建立了逐次递推的线性表示形式。若式(2)具有最小正周期m的周期解，由最小正周期定义有：

$$\begin{cases} x_{j+1}=\dfrac{\alpha x_j}{1+\alpha_{11}x_j+\alpha_{12}y_j} \\ y_{j+1}=\dfrac{\beta x_j}{1+\alpha_{21}x_j+\alpha_{22}y_j} \end{cases}\quad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1 \tag{6}$$

式中　当 $k<m$ 时，$x_k=x_0$，　$y_k=y_0$ 不同时成立，但有：

$$x_m=x_0,\quad y_m=y_0 \tag{7}$$

式(6)和式(7)正是定理1中采用齐次坐标记法下的式(3)和式(4)。反之，若定理1中式(3)和式(4)条件成立，把齐次坐标记法转化为非齐次通常坐标正是定义中的式(6)和式(7)，也就是系统式(2)具有最小正周期m的周期解。

证毕

2　*m*=2、3情形的研究

m=1，恰为系统正平衡点方程组，本文不再作进一步讨论。*m*=2，由定理1有等价方程组为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha & 0 \\ 0 & \mu_1\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2\alpha & 0 \\ 0 & \mu_2\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 - 1 \\ 1/\mu_1 - 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_2 - 1 \\ 1/\mu_2 - 1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

显然有 $0<\lambda_j<1,\ 0<\mu_j<1,(j=1、2)$，由式(8)有$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2\alpha^2 & 0 \\ 0 & \mu_1\mu_2\beta^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，则 $\alpha = 1/\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，$\beta = 1/\sqrt{\mu_1\mu_2}$，$x_1 = \lambda_1\alpha x_0$，$y_1 = \mu_1\beta y_0$，由式(9)系统中系数 a_{11},a_{12}和a_{21},a_{22} 适合方程组为：

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 = 1/\lambda_1 - 1 \\ \alpha_{11}\lambda_1\alpha x_0 + \alpha_{12}\mu_1\beta y_0 = 1/\lambda_2 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 = 1/\mu_1 - 1 \\ \alpha_{21}\lambda_1\alpha x_0 + \alpha_{22}\mu_1\beta y_0 = 1/\mu_2 - 1 \end{cases} \tag{10}$$

若式(10)中二组方程组系数矩阵及对应增广矩阵秩均为1，可导出 $\lambda_1 = \lambda_2$。$\mu_1 = \mu_2$。此时即为*m*=1情形。
若式(10)中二组方程组系数矩阵秩为2，则 a_{11},a_{12}和a_{21},a_{22} 有唯一解：

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\mu_1\beta(1/\lambda_1 - 1) - (1/\lambda_2 - 1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)x_0} \quad & a_{12} &= \frac{(1/\lambda_2 - 1) - \lambda_1\alpha(1/\lambda_1 - 1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)y_0} \\ a_{21} &= \frac{\mu_1\beta(1/\mu_1 - 1) - (1/\mu_2 - 1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)x_0} \quad & a_{22} &= \frac{(1/\mu_2 - 1) - \lambda_1\alpha(1/\mu_2 - 1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)y_0} \end{aligned} \tag{11}$$

由 $a_{ij} > 0,(i,j=1,2)$，则有：

$$\begin{cases} (1/\lambda_1 - 1)\mu_1\beta > (1/\lambda_2 - 1) > (1/\lambda_1 - 1)\lambda_1\alpha \\ (1/\mu_1 - 1)\mu_1\beta > (1/\mu_2 - 1) > (1/\mu_1 - 1)\lambda_1\alpha \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} (1/\lambda_1 - 1)\mu_1\beta < (1/\lambda_2 - 1) < (1/\lambda_1 - 1)\lambda_1\alpha \\ (1/\mu_1 - 1)\mu_1\beta < (1/\mu_2 - 1) < (1/\mu_1 - 1)\lambda_1\alpha \end{cases} \tag{13}$$

由式(12)：$(1/\lambda_2 - 1) > (1/\lambda_1 - 1)\lambda_1\alpha$有$(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2})(1+\sqrt{\lambda_1\lambda_2}) > 0$，则$\lambda_1 > \lambda_2$，$(1/\mu_1 - 1)\mu_1\beta > (1/\mu_2 - 1)$有 $(\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1})\ (1+\sqrt{\mu_1\mu_2}) > 0$,则$\mu_2 > \mu_1$。则 $\lambda_1/\lambda_2 > 1 > \mu_1/\mu_2$ 与 $\mu_1\beta = \sqrt{\mu_1/\mu_2} > \sqrt{\lambda_1/\lambda_2} = \lambda_1\alpha$ 矛盾。
同理对式(13)有类似结论，由此有：

命题 1　系统式(2)不存在最小正周期*m*=2的周期解。由定理1，*m*=3时，等价于下列二组线性组为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\alpha & 0 \\ 0 & \mu_1\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2\alpha & 0 \\ 0 & \mu_2\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_3\alpha & 0 \\ 0 & \mu_3\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{14}$$

和

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 - 1 \\ 1/\mu_1 - 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_2 - 1 \\ 1/\mu_2 - 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_3 - 1 \\ 1/\mu_3 - 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

显然有 $0<\lambda_j<1,\ \ 0<\mu_j<1\ \ (j=1,2,3)$，由式(14)有$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2\lambda_3\alpha^3 & 0 \\ 0 & \mu_1\mu_2\mu_3\beta^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$则 $\alpha = 1/\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$，$\beta = 1/\sqrt[3]{\mu_1\mu_2\mu_3}$，由此，$\alpha_{11},\alpha_{12}$及$\alpha_{21},\alpha_{22}$ 适合方程组为：

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 = 1/\lambda_1 - 1 \\ \alpha_{11}\lambda_1\alpha x_0 + \alpha_{12}\mu_1\beta y_0 = 1/\lambda_2 - 1 \\ \alpha_{11}\lambda_1\lambda_2\alpha^2 x_0 + \alpha_{12}\mu_1\mu_2\beta^2 y_0 = 1/\lambda_3 - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 = 1/\mu_1 - 1 \\ \alpha_{21}\lambda_1\alpha x_0 + \alpha_{22}\mu_1\beta y_0 = 1/\mu_2 - 1 \\ \alpha_{21}\lambda_1\lambda_2\alpha^2 x_0 + \alpha_{22}\mu_1\mu_2\beta^2 y_0 = 1/\mu_3 - 1 \end{cases} \tag{16}$$

若二方程组系数矩阵和增广矩阵秩均为1，则有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$，进而 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ 也矛盾于m=3的最小性。故只能式(16)系数矩阵增广矩阵秩均为2，才可能有解。此时必有：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/\lambda_1 - 1 \\ \lambda_1\alpha & \mu_1\beta & 1/\lambda_2 - 1 \\ \lambda_1\lambda_2\alpha^2 & \mu_1\mu_2\beta^2 & 1/\lambda_3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/\mu_1 - 1 \\ \lambda_1\alpha & \mu_1\beta & 1/\mu_2 - 1 \\ \lambda_1\lambda_2\alpha^2 & \mu_1\mu_2\beta^2 & 1/\mu_3 - 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{17}$$

不失一般性，可设式(16)二方程组中第一、第二方程可唯一确定 $a_{ij}(i, j = 1,2)$ 即 $\Delta = \mu_1\beta - \lambda_1\alpha \neq 0$，否则可交换 $(x_0, y_0)^\tau, (x_1, y_1)^\tau, (x_2, y_2)^\tau$ 顺序，即适当选取初始值点。$a_{ij} > 0 (i, j = 1,2)$ 条件为：

$$\begin{cases} \mu_1\beta(1/\lambda_1 - 1) > (1/\lambda_2 - 1) > \lambda_1\alpha(1/\lambda_1 - 1) \\ \mu_1\beta(1/\mu_1 - 1) > (1/\mu_2 - 1) > \lambda_1\alpha(1/\mu_1 - 1) \end{cases} \tag{18}$$

或

$$\begin{cases} \mu_1\beta(1/\lambda_1 - 1) < (1/\lambda_1 - 1) < \lambda_1\alpha(1/\lambda_1 - 1) \\ \mu_1\beta(1/\mu_1 - 1) < (1/\mu_2 - 1) < \lambda_1\alpha(1/\mu_1 - 1) \end{cases} \tag{19}$$

由此得到系统式(2)有最小正周期m=3的一般表达式。

命题 2　已知初始值 $(x_0, y_0) \in R_+^{\ 2}$，对二组不全相等参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$及$\mu_1, \mu_2, \mu_3$。$0 < \lambda_j < 1, 0 < \mu_j < 1 (i, j = 1,2,3)$ 记 $\alpha = 1\big/\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$；$\beta = 1\big/\sqrt[3]{\mu_1\mu_2\mu_3}$。若适合下述条件：1) $\alpha, \beta, \lambda_i, \lambda_j (i, j = 1,2,3)$ 适合条件式(17)；2) $\alpha, \beta, \lambda_i, \lambda_j (i, j = 1,2,3)$ 适合条件式(18)或式(19)；3) $\Delta = \mu_1\beta - \lambda_1\alpha \neq 0$。

则系统式(2)有最小正周期m=3的周期解且一般表达式为：

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{1/\sqrt[3]{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\ x_n}{1 + \dfrac{\mu_1\beta(1/\lambda_1 - 1) - (-1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)x_0} x_n + \dfrac{(1/\lambda_2 - 1) - \lambda_1\alpha(1/\lambda_1 - 1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)y_0} y_n} \\ y_{n+1} &= \frac{1/\sqrt[3]{\mu_1\mu_2\mu_3}\ y_n}{1 + \dfrac{\mu_1\beta(1/\mu_1 - 1) - (1/\mu_2 - 1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)x_0} x_n + \dfrac{(1/\mu_2 - 1) - \lambda_1\alpha(1/\mu_1 - 1)}{(\mu_1\beta - \lambda_1\alpha)y_0} y_n} \end{aligned} \tag{20}$$

参 考 文 献

[1] May R. Simple mathematical models with very complicated dynamics[J]. Nature, 1976, 261: 459-469

[2] Cushing J M. An Introduction to Structured Population Dynamics[M]. SIAM, Philadelphia PA., 1998

[3] Rogers T D. Chaos in systems in population biology[J]. Prog. Theoret. Bilo., 1981, 6: 91-144

[4] Franke J E, Yakubu A A. Geometry of exclusion principles in discrete systems[J]. J. Math. Anal., 1992, 168(1): 385-400

[5] Hassel M P, Comius H N. Discrete time models far two-species competition[J]. Theor. Prog. 1976, 1(9): 202-221

[6] Wang W D. Global stability of discrete competition model[J]. Comput. Math, 2001, 1(42): 773-783

[7] Liu P Z, Samy K G. On a model of competition in periodic environments[J]. Appl.Math. Comput., 1997, 82: 207-238

编　辑　刘文珍