

# 航空发动机数学模型

赵廷渝

(中国民航飞行学院教务处 四川 广汉 618307)

**【摘要】**提高模型精度以及保证方程求解收敛是目前发动机建模亟待解决的问题。该文以双转子加力涡喷发动机的数学模型为例,介绍了线性状态空间模型的建立,提出了一种根据发动机进口参数进行飞行包线区域划分的方法,在应用该方法得到的飞行区域内,发动机模型的结构参数扰动最小。

**关键词** 航空发动机; 数学模型; 线性状态空间; 飞行包线

中图分类号 TK472 文献标识码 A

## Aeroengine's Mathematical Model

ZHAO Ting-yu

(Dean's Office, Civil Aviation Flight University of China, Sichuan Guanghan 618307)

**Abstract** Improving models' precision and ensuring equation's resolution constringency are two unresolved problems in engine modeling. The mathematical model of twin-rotor accelerating turbo-jet engine is taken as an example to illustrate the modeling of linear state-space model. A method is proposed for dividing the flight envelope into a number of sub-regions in witch the perturbations of aeroengine model are relatively small.

**Key words** aeroengine; mathematical model; linear state-space; flight envelope

航空发动机是由实现各种功能的部件组成的一个复杂的空气动力学及热力学系统,它的每一部件均可在数学上描述为一个关联输入和输出的函数,各个部件之间的参数存在一定的联系,如流量平衡、压力平衡和功率平衡等,这些平衡关系构成了一系列的非线性微分方程,通过求解方程便可根据发动机的输入得到发动机的输出,发动机的输入输出关系即发动机模型。通过建立各部件输入输出关系和根据部件间参数的各种约束关系建立发动机模型的方法叫部件法。当发动机参数变化幅度较小时,将发动机非线性微分方程用Taylor级数展开并仅保留线性部分则可得到发动机线性状态空间模型,即小偏离线性化模型,按部件法建立的发动机非线性模型则被称为大偏离模型<sup>[1]</sup>。

### 1 发动机状态空间模型

如果不考虑发动机部件气容动态及燃油燃烧动态,发动机的动态将仅取决于发动机两个转子的惯性。发动机高、低压转子转速 $n_H$ 、 $n_L$ 对时间的导数 $\dot{n}_H$ 和 $\dot{n}_L$ 与外界输入主供油量 $m_f$ 、加力供油量 $m_{af}$ 、发动机尾喷口面积 $A_e$ 、飞行高度 $H$ 及飞行马赫数 $Ma$ 有关。另外, $\dot{n}_H$ 和 $\dot{n}_L$ 不为零的原因是发动机涡轮功与压气机功不平衡,而涡轮功与压气机功与 $n_H$ 和 $n_L$ 有关,所以, $\dot{n}_H$ 和 $\dot{n}_L$ 的大小还取决于 $n_H$ 和 $n_L$ 。发动机模型可采用非线性方程描述<sup>[1]</sup>:

收稿日期: 2005-04-27

作者简介: 赵廷渝(1965-),男,硕士,副教授,主要从事航空发动机控制方面的研究。

$$\begin{cases} \frac{dn_L}{dt} = f_1(n_L, n_H, m_f, m_{\text{faf}}, A_c, H, Ma) \\ \frac{dn_H}{dt} = f_2(n_L, n_H, m_f, m_{\text{faf}}, A_c, H, Ma) \\ y = f_3(n_L, n_H, m_f, m_{\text{faf}}, A_c, H, Ma) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $y$  表示某些发动机参数, 如主燃烧室总温  $T_3^*$ 、涡轮落压比  $\pi_T$  等。

在以下的分析中将认为  $m_{\text{faf}} = 0$ , 取  $y = T_3^*$ 。将方程组(1)中各个方程在稳态点处(下标 ‘0’ 表示)按Taylor级数展开, 当发动机参数变化充分小时, 展开式中高阶非线性部分可忽略不计, 可简化为:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n_L}{dt} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial n_L}\right)_0 \Delta n_L + \left(\frac{\partial f_1}{\partial n_H}\right)_0 \Delta n_H + \left(\frac{\partial f_1}{\partial m_f}\right)_0 \Delta m_f + \left(\frac{\partial f_1}{\partial A_c}\right)_0 \Delta A_c + \left(\frac{\partial f_1}{\partial H}\right)_0 \Delta H + \left(\frac{\partial f_1}{\partial Ma}\right)_0 \Delta Ma \\ \frac{\Delta n_H}{dt} &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial n_L}\right)_0 \Delta n_L + \left(\frac{\partial f_2}{\partial n_H}\right)_0 \Delta n_H + \left(\frac{\partial f_2}{\partial m_f}\right)_0 \Delta m_f + \left(\frac{\partial f_2}{\partial A_c}\right)_0 \Delta A_c + \left(\frac{\partial f_2}{\partial H}\right)_0 \Delta H + \left(\frac{\partial f_2}{\partial Ma}\right)_0 \Delta Ma \\ \Delta T_3^* &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial n_L}\right)_0 \Delta n_L + \left(\frac{\partial f_3}{\partial n_H}\right)_0 \Delta n_H + \left(\frac{\partial f_3}{\partial m_f}\right)_0 \Delta m_f + \left(\frac{\partial f_3}{\partial A_c}\right)_0 \Delta A_c + \left(\frac{\partial f_3}{\partial H}\right)_0 \Delta H + \left(\frac{\partial f_3}{\partial Ma}\right)_0 \Delta Ma \end{aligned}$$

令:  $\bar{n}_L = \frac{\Delta n_L}{n_{Lj}}$ ,  $\bar{n}_H = \frac{\Delta n_H}{n_{Hj}}$ ,  $\bar{T}_3^* = \frac{\Delta T_3^*}{T_{3j}^*}$ ,  $\bar{m}_f = \frac{\Delta m_f}{m_{fj}}$ ,  $\bar{A}_c = \frac{\Delta A_c}{A_{cj}}$ ,  $\bar{H} = \frac{\Delta H}{H_j}$ ,  $\bar{Ma} = \frac{\Delta Ma}{Ma_j}$ 。其中下标  $j$  表示基准状态。

线性微分方程可化为无因次形式:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{n}_L}{dt} = a_{11}\bar{n}_L + a_{12}\bar{n}_H + b_{11}\bar{m}_f + b_{12}\bar{A}_c + b_{111}\bar{H} + b_{112}\bar{Ma} \\ \frac{d\bar{n}_H}{dt} = a_{21}\bar{n}_L + a_{22}\bar{n}_H + b_{21}\bar{m}_f + b_{22}\bar{A}_c + b_{121}\bar{H} + b_{122}\bar{Ma} \\ \bar{T}_3^* = c_{21}\bar{n}_L + c_{22}\bar{n}_H + d_{21}\bar{m}_f + d_{22}\bar{A}_c + d_{2121}\bar{H} + b_{2122}\bar{Ma} \end{cases} \quad (2)$$

各系数可通过简单的换算得到, 如:  $a_{12} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial n_H}\right)_0 \frac{n_{Hj}}{n_{Lj}}$ ,  $b_{121} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial H}\right)_0 \frac{H_j}{n_{Hj}}$ 。令:  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ ,

$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} b_{111} & b_{112} \\ b_{121} & b_{122} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_{2121} & d_{2122} \end{bmatrix}$ 。方程组(2)可改写为:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_p + \mathbf{B}\mathbf{u}_p + \mathbf{B}_1\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}_p + \mathbf{D}\mathbf{u}_p + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} \end{cases} \quad (3)$$

式中  $\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \bar{n}_L \\ \bar{n}_H \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \bar{m}_f \\ \bar{A}_c \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \bar{H} \\ \bar{Ma} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \bar{n}_L \\ \bar{T}_3^* \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{x}_p$ ,  $\mathbf{u}_p$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{w}$  分别称为状态向量, 控制向量, 输出向量和干扰向量。式(3)即航空发动机的线性状态空间模型。为使控制系统无静态控制误差, 可在对象的输入端加入积分环<sup>[2,3]</sup>。对于式(3)有:  $\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \bar{m}_f \\ \bar{A}_c \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \mathbf{u}$ 。即:

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{u} \quad (4)$$

重新选定状态量:  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{u}_p \end{bmatrix}$ , 于是由式(3)和(4)可得:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}_{\text{ag}}\mathbf{x} + \mathbf{B}_{\text{ag}}\mathbf{u} + \mathbf{B}_{1\text{ag}}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_{\text{ag}}\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21\text{ag}}\mathbf{w} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{A}_{\text{ag}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{B}_{\text{ag}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{C}_{\text{ag}} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{D}]$ ,  $\mathbf{B}_{1\text{ag}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D}_{21\text{ag}} = \mathbf{D}_{21}$ 。上述状态空间模型即为发动机的广义模型。为书写方便, 下标 ‘ag’ 可略去。

## 2 航空发动机模型与飞行条件的关系

当发动机的工作状态确定后, 发动机的特性取决于发动机进口的总温  $T_1^*$ 、总压  $P_1^*$  及环境静压  $P_H$ 。如果进气道确定, 则上述3个参数仅为飞行高度  $H$  和飞行马赫数  $Ma$  的函数, 即:  $T_1^* = T_1^*(H, Ma)$ ,  $P_1^* = P_1^*(H, Ma)$ ,

$P_H = P_H(H)$ 。当给定发动机的工作状态及飞行包线内飞行点(即给定飞行高度 $H$ 和飞行马赫数 $Ma$ )，根据发动机的状态空间模型，当 $H$ 和 $Ma$ 在飞行包线内的某个区域内变化时，发动机的状态空间模型变化不大。给定飞行高度 $H_0$ 及飞行马赫数 $Ma_0$ ，则可计算出参数 $T_{10}^*$ 、 $P_{10}^*$ 和 $P_{H0}$ 。令：

$$J = \sqrt{[(P_1^* - P_{10}^*)/P_{10}^*]^2 + [(T_1^* - T_{10}^*)/T_{10}^*]^2 + [(P_H - P_{H0})/P_{H0}]^2} \leq \varepsilon \tag{6}$$

式中  $J$ 为 $H$ 和 $Ma$ 的函数。在整个飞行包线内改变 $H$ 和 $Ma$ 并记录所有满足不等式(1)的 $H$ 和 $Ma$ 便可获得上述飞行区域。图1给出了部分飞行区域，其中 $\varepsilon = 0.1$ 。为了验证区域划分的合理性，在飞行包线内选择了3个点a, b, c。从距离来看，a、b点的距离最长，但同在一个区域；b、c点的距离最短，但分属不同区域。发动机处于最大状态时方程(2)的部分系数如表1所示。图2给出了对应这3点发动机广义模型的奇异值图，图中， $f$ 为输入频率， $sv$ 为奇异值。根据表1和图2，b与a点的模型差异最小。这表明本文的这种飞行包线区域划分的思想是正确的。更大量的计算也证实了这一点。

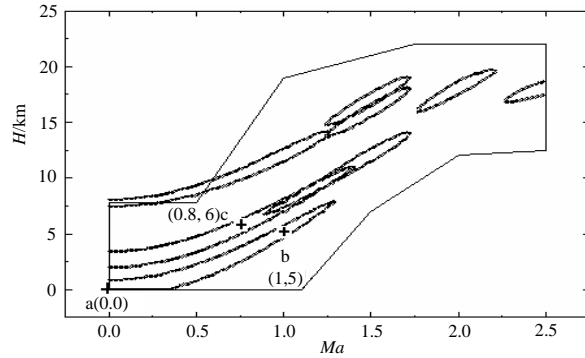


图1 飞行包线及部分飞行区域

表1 不同飞行条件下发动机微分方程的部分系数

	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$c_{21}$	$c_{22}$	$d_{21}$	$d_{22}$
a	-2.002	1.057 30	0.210 80	-0.406	0.558 52	1.240 20	0.559 04	0.444 47	-0.123 20	0.155 52	0.481 71	-0.022 2
b	-2.053	1.002 70	0.226 00	-2.237	0.577 29	1.485 50	0.509 73	0.194 51	-0.306 80	0.132 28	0.506 67	-0.013 1
c	-2.275	0.800 08	0.367 43	-1.733	0.563 66	0.968 07	0.524 83	0.149 24	0.046 37	0.142 56	0.654 08	-0.009 2

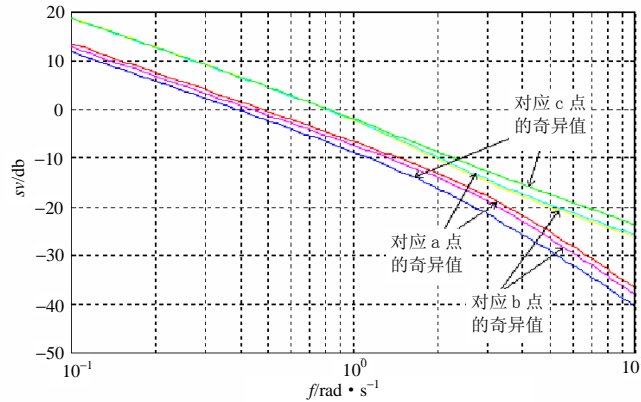


图2 对应不同飞行点的发动机模型频谱图

### 3 结束语

在建立发动机线性状态空间模型时，应根据发动机进口参数对飞行包线进行区域划分，可使该飞行区域内发动机模型的结构参数摄动最小，从而提高模型精度。

#### 参考文献

[1] 管彦深, 张加桢. 航空动力装置控制(系统部分)[M]. 北京: 国防工业出版社, 1985  
 [2] 申铁龙. 基于观测器的  $H_\infty$  鲁棒次优性能恢复设计[J]. 自动化学报, 1994, 20(6): 743-749  
 [3] Zhou K, Khargonekar. An algebraic riccati equation approach to  $H_\infty$  optimization[J]. System and Control Letters, 1988, 11: 85-91

编辑 漆蓉